Teodor HUIDU **Cornel MARIN**

PROBLEME REZOLVATE DE MECANICĂ

Recenzia ştiinţifică:

Prof. dr. ing. Nicolae Enescu

Prof. dr. ing. Ion ROŞCA

Descrierea CIP a Bibliotecii nationale a României
HUIDU, TEODOR
Probleme rezolvate de mecanică / Teodor Huidu,
Cornel Marin. - Târgovişte : Editura Macarie, 2001
260p; 25cm - (Universitaria)
Bibliogr.
ISBN 973 - 8135 - 60 - 5
I. Marin, Cornel
531(076)

Consilier editorial: Mihai VLAD
Tehnoredactare computerizată: Cornel MARIN

©2001 - Toate drepturile sunt rezervate autorilor

CUPRINS

PREFAȚĂ

CAPITOLUL I STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Elemnte de bază din teoria vectorilor. Rezumat

1.1. Statica punctului material. Probleme din teoria vectorilor.

1.2. Reducerea unui sistem de forțe concurente coplanare. Probleme rezolvate

1.3. Reducerea unui sistem de forțe concurente spațiale. Probleme rezolvate

Echilibrul punctului material liber şi supus la legături. Axioma legăturilor Rezumat

1.4 Echilibrul punctului material liber. Probleme rezolvate

1.5 Echilibrul punctului material supus la legături ideale şi reale. Probleme rezolvate

Probleme propuse

CAPITOLUL II REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

Reducerea istemelor de forțe aplicate solidului rigid. Rezumat

2.1. Reducerea sistemelor coplanare de forțe şi cupluri. Probleme rezolvate

2.2. Reducerea sistemelor de forțe paralele. Probleme rezolvate .

2.3. Reducerea sistemelor spațiale de forțe şi cupluri. Probleme rezolvate

CAPITOLUL III CENTRE DE MASĂ SI CENTRE DE GREUTATE

Centre de masă şi centre de greutate. Rezumat

3.1 Centrul de masă pentru bare omogene. Probleme rezolvate.

3.2 Centrul de masă pentru plăci omogene. Probleme rezolvate.

3.3 Centrul de masă pentru corpuri omogene. Probleme rezolvate.

CAPITOLUL IV

ECHILIBRUL FORȚELOR APLICATE SOLIDULUI RIGID

Teoremele echilibrului forțelor aplicate solidului rigid. Rezumat

4.1. Echilibrul solidului rigid liber sub acțiunea unui sistem spațial de forțe.

4.2. Echilibrul solidului rigid de tip placă sau bară supus la legături sub acțiunea unui sistem coplanar de forțe.

CAPITOLUL V ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

Teoremele echilibrului forțelor aplicate sistemelor de corpuri. Rezumat

5.1. Echilibrul sistemelor plane de corpuri de tip bară. Probleme rezolvate

5.2. Echilibrul sistemelor plane de corpuri cu frâne de tip sabot, tampon sau bandă. Probleme rezolvate

CAPITOLUL VI GRINZI CU ZĂBRELE

Echilibrului forțelor aplicate grinzilor cu zăbrele. Rezumat

Grinzi cu zăbrele. Probleme rezolvate .

CAPITOLUL VII ECHILIBRUL FIRELOR OMOGENE

Echilibrul firelor omogene. Rezumat.

Probleme rezolvate de echilibrul firelor omogene

CAPITOLUL VIII

CINEMATICA MIŞCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL

Probleme rezolvate de cinematica mişcării absolute a punctului material

CAPITOLUL IX

DINAMICA MIŞCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL

Probleme rezolvate de dinamica mişcării absolute a punctului material

CAPITOLUL X

CINEMATICA RIGIDULUI ŞI A SISTEMELOR DE RIGIDE

Probleme rezolvate de cinematica rigidului şi a sistemelor de rigide

Probleme propuse

CAPITOLUL XI

CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

Probleme rezolvate de cinematica mişcării absolute a punctului material

Probleme propuse

CAPITOLUL XII

DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

Probleme rezolvate de dinamica mişcării absolute a punctului material

Probleme propuse

CAPITOLUL XIII

DINAMICA RIGIDULUI ŞI A SISTEMELOR DE RIGIDE

Probleme rezolvate de dinamica rigidului şi a sistemelor de rigide

Probleme propuse

CAPITOLUL XIV

MECANICĂ ANALITICĂ

Principiul lucrului mecanic virtual şi principiul lui d'Alembert. Probleme rezolvate

Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua. Probleme rezolvate.

PREFAȚĂ

Această lucrare este rezultatul experienței autorilor în predarea cursului de *Mecanica teoretică,* studenților Facultăților de inginerie din cele două centre universitare: *Universitatea "Petrol-Gaze" Ploieşti* şi *Universitatea "Valahia" Târgovişte.*

Lucrarea cuprinde 14 capitole şi anume: Statica punctului material, Elemente de bază din teoria vectorilor, Reducerea forțelor aplicate solidului rigid, Centre de masă şi centre de greutate, Echilibrul forțelor aplicate solidului rigid, Echilibrul sistemelor de corpuri, Grinzi cu zăbrele şi Echilibrul firelor omogene, Cinematica punctului material, Dinamica punctului material, Cinematica mişcării relative a punctului material, Dinamica mişcării relative punctului material, Cinematica rigidului şi a sistemelor de rigide, Dinamica rigidului şi a sistemelor de rigide, Elemente de mecanică analitică. Primele şapte capitole conțin câte un scurt *Rezumat de teorie* pentru înțelegerea problemelor rezolvate şi care sunt în acord cu Programa analitică a cursului de Mecanică predat studenților în anul I şi II la facultățile tehnice.

S-au prezentat cinci algoritmi de rezolvare a unor probleme de Statică cu ajutorul programului Microsoft EXCEL, cu cîte un exemplu concret pentru fiecare caz .

Unele aplicații sunt inspirate din practica inginerească, altele au fost create de autori de-a lungul anilor, ca subiecte de examen. Acestea au un grad de dificultate mediu, fiind accesibile studenților din anii I şi II de la profilurile *mecanic, metalurgic, electric,* etc. Forma de prezentare clară pune în evidență experiența în activitatea cu studenții, fiecare capitol fiind bine fundamentat şi uşor de asimilat.

Aceast culegere este rezultatul colaborării fructuoase dintre doi autori de formații diferite: un matematician şi un inginer mecanic. Autorii speră că prezentarea sub această formă a problemelor şi a temelor aplicative va fi utilă atât pentru pregătirea examenului de Mecanică (pentru studenții anilor I şi II) precum şi pentru toți cei interesați în rezolvarea unor aplicații practice de Mecanică.

Autorii doresc să mulțumească tuturor *studenților şi colegilor* pentru observațiile, sugestiile, adăugirile pe care le-au adus în timp şi care au contribuit la apariția lucrării sub această formă.

De asemenea mulțumim călduros *sponsorilor* care au contribuit la apariția acestei ediții, şi pe care îi asigurăm atât de recunoştința noastră cât mai ales de cea a beneficiarilor acestei lucrări.

Târgovişte **Autorii**

CAPITOLUL I
STATICA PUNCTULUI MATERIAL

REZUMAT DE TEORIE

a. Mărimi scalare şi vectoriale

În Mecanica teoretică se operează cu *mărimi scalare* (de exemplu: masa, timpul, lungimea, etc) şi cu *mărimi vectoriale* (de exemplu: forța, momentul unei forțe în raport cu un punct, cuplul de forțe, viteza, accelerația, impulsul, momentul cinetic, etc).

Vectorul este o *entitate matematică* caracterizată prin: *punct de aplicație*, *direcție* (suport), *sens* (orientare) şi *mărime* (scalar, modul)

În funcție de punctul de aplicație se deosebesc:

- *vectori liberi* – care au punctul de aplicație oriunde în spațiu şi sunt caracterizați de *trei parametri scalari independenți* (respectiv, proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate);
- *vectori alunecători* -au punctul de aplicație situat pe o dreaptă din spațiu şi sunt caracterizați de *cinci parametri scalari independenți* (respectiv, proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate şi coordonatele punctului de intersecție al suportului său cu planul Oxy);
- *vectori legați* - au punctul de aplicație fix în spațiu şi sunt caracterizați de *şase parametri scalari independenți* (respectiv proiecțiile vectorului pe cele trei axe şi coordonatele punctului de aplicație).

b. Expresia analitică a unui vector liber şi a unui versor

Se consideră un sistem cartezian de axe Oxyz având versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ pentru care se cunosc proiecțiile a_x, a_y, a_z , ale vectorului pe cele trei axe. Expresia analitică a vectorului $\bar{a}$ este:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad (1)$$

Mărimea vectorului $\bar{a}$ este prin definiție numărul pozitiv notat cu :

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2)$$

Cosinuşii directori ai unghiurilor vectorului $\bar{a}$ cu direcțiile celor 3 axe sunt:

$$\cos(\bar{a},\bar{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos(\bar{a},\bar{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\bar{a},\bar{k}) = \frac{a_z}{a} \quad (3)$$

Versorul vectorului $\bar{a}$ este prin definiție un vector unitar, având mărimea egală cu 1, aceeaşi direcție şi sens cu vector $\bar{a}$:

$$vers\,\bar{a} = \bar{u}_a = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{a}\bar{i} + \frac{a_y}{a}\bar{j} + \frac{a_z}{a}\bar{k} \tag{4}$$

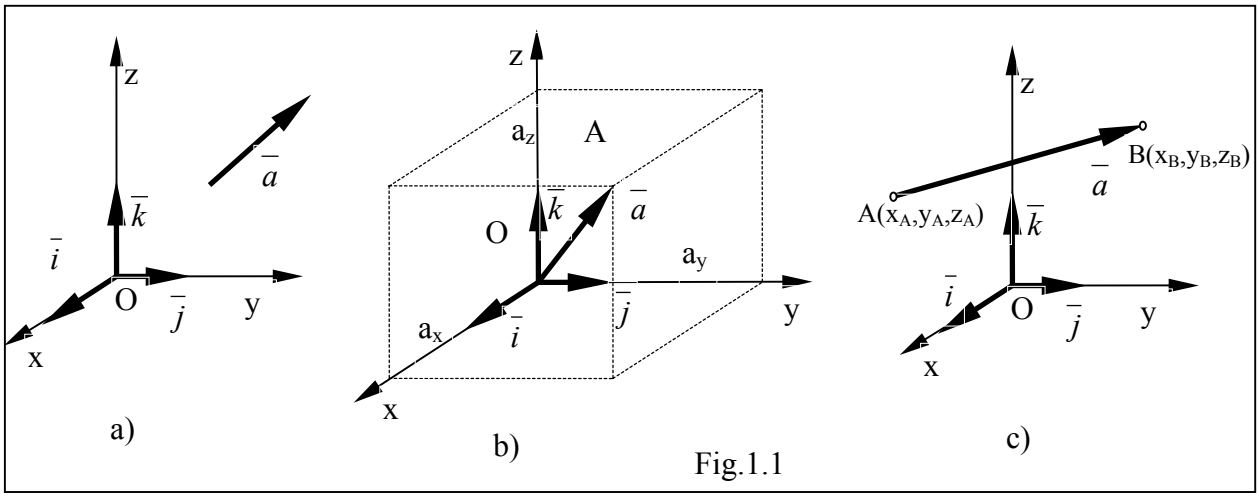


Fig.1.1

Un vector poate fi definit prin cele două extremități ale sale având coordonatele $A(x_A,y_A,z_A)$ şi $B(x_B,y_B,z_B)$, şi are expresia analitică:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k} \tag{5}$$

Expresia analitică a versorului vectorului $\overline{AB}$ conform (4) este:

$$vers\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \tag{6}$$

Observație

În cazul rigidului supus la legături, reacțiunile sunt necunoscute ale problemei (deoarece nu se cunoaşte mărimea şi sensul lor): pentru rezolvarea problemei se alege un sens oarecare ale reacțiunii; dacă din calcul rezultă un număr pozitiv, atunci sensul ales este corect; dacă din calcul rezultă un număr negativ, sensul real este opus celui ales.

c. Produsul scalar a doi vectori. Proiecția unui vector pe o axă

Dându-se un sistem de axe cartezian Oxyz şi vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ având expresiile analitice: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, se defineşte *produsul scalar al celor doi vectori* , numărul (pozitiv sau negativ):

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a\cdot b\cdot cos(\bar{a},\bar{b}) \tag{7}$$

Expresia analitică a produsului scalar este:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_y \tag{8}$$

Cu ajutorul produsului scalar se poate exprima cosinusul unghiului dintre cei doi vectori ; din relațiile (7) şi (8) rezultă:

$$cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (9)$$

Cu ajutorul produsului scalar se poate exprima analitic proiecția unui vector $\bar{a}$, pe o direcție orientată Δ având versorul:

$$\bar{u}_\Delta = cos\alpha\cdot\bar{i} + cos\beta\cdot\bar{j} + cos\gamma\cdot\bar{k}\ , \qquad (10)$$

astfel:

$$a_u = pr_\Delta\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{u}_\Delta = a_x\cdot cos\alpha + a_y\cdot cos\beta + a_z\cdot cos\gamma \qquad (11)$$

Ținând seama expresia (11), proiecția vectorului $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\,\bar{j} + a_z\,\bar{k}$ pe direcția vectorului $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\,\bar{j} + b_z\,\bar{k}$ se scrie :

$$a_b = pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{u}_b = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{b} \qquad (12)$$

d. Produsul vectorial a doi vectori, a produsului mixt şi a produsului dublu vectorial a trei vectori

Se consideră un sistem cartezian de axe Oxyz şi vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ având expresiile analitice: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\,\bar{j} + a_z\,\bar{k}$ şi respectiv $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\,\bar{j} + b_z\,\bar{k}$. Se defineşte *produsul vectorial al celor doi vectori* $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$, un vector având următoarele caracteristici:

- mărimea sau modulul egal cu aria paralelogramului format din cei doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$: $|\bar{c}| = a\cdot b\cdot sin(\bar{a},\bar{b})$
- direcția - perpendiculară pe planul paralelogramului format din cei doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$: $\bar{c}\perp(\bar{a},\bar{b})$ (fig.1.2).
- sensul - dat de regula burghiului drept sau triedrul format din cei trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ (fig.1.2).

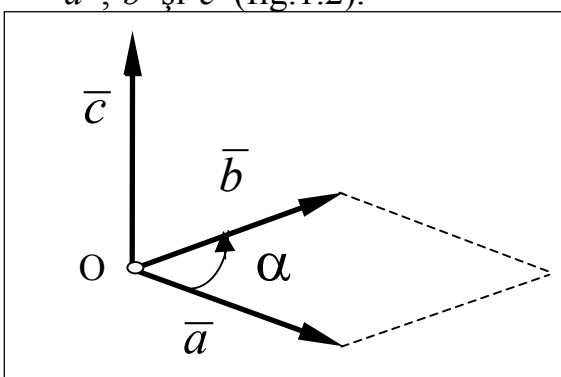


Fig.1.2

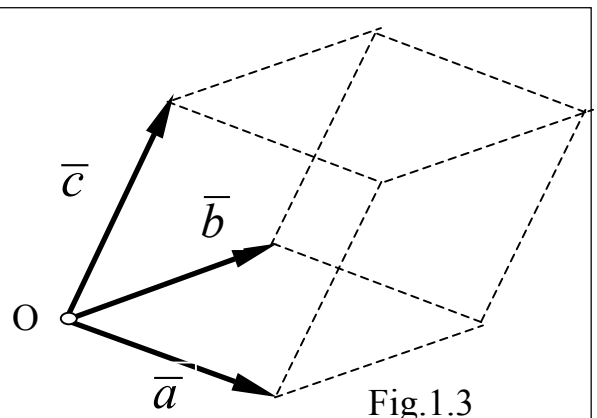


Fig.1.3

Produsul vectorial *a doi vectori* $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ are expresia analitică:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ sau :}$$
$$\bar{c} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} \tag{13}$$

Produsul mixt *a trei vectori* $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ este prin definiție produsul scalar dintre vectorul $\bar{a}$ şi vectorul $(\bar{b} \times \bar{c})$:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_x & a_x \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{14}$$

Produsul mixt respectă următoarea *regulă (a permutărilor circulare):*

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$
$$\text{sau} \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \tag{15}$$

Produsul mixt reprezintă volumul paralelipipedului având ca muchii concurente într-un vârf, pe cei trei vectori (fig. 1.3)

Produsul dublu vectorial a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ este prin definiție produsul vectorial dintre vectorul $\bar{a}$ şi vectorul $(\bar{b} \times \bar{c})$ şi se determină cu ajutorul formulei:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} \tag{16}$$

1.1 OPERAȚII CU VECTORI

PROBLEME REZOLVATE

1.1.1 ***Se consideră*** *vectorii având următoarele expresii anlitice față de un sistem de axe Oxyz:* $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$; $\bar{b} = 5\bar{j} + 4\bar{k}$; $\bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j}$

Se cere *să se calculeze:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b}; \quad pr_{\bar{b}}\bar{a}; \quad \bar{a} \times \bar{b}; \quad |\bar{a} \times \bar{b}|; \quad \cos(\bar{a}, \bar{b}); \quad \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}); \quad \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$$

Problema s-a rezolvat folosind relațiile prezentate în rezumatul de teorie cu ajutorul programului Microsoft-Excel conform algoritmului prezentat în continuare.

ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL MICROSOFT EXCEL ŞI REZULTATELE OBȚINUTE PENTRU PROBLEMA 1.1.1

DATE DE INTRARE **DATE DE IEŞIRE**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	$\mathbf{a_x}$	$\mathbf{a_y}$	$\mathbf{a_z}$	$\mathbf{b_x}$	$\mathbf{b_y}$	$\mathbf{b_z}$	$\mathbf{c_x}$	$\mathbf{c_y}$	$\mathbf{c_z}$	$\lvert\bar{a}\rvert$	$\lvert\bar{b}\rvert$	$\lvert\bar{c}\rvert$	$\bar{a}\cdot\bar{b}$
0										SQRT(A1^2+ B1^2+C1^2)	SQRT(D1^2+ E1^2+F1^2)	SQRT(G1^2+ H1^2+I1^2)	A1*D1+ B1*E1+ C1*F1
1	2	-1	3	0	5	4	-2	1	0	3,7416	6,4031	2,2361	7

N	O	P	R	S
$pr_{\bar{b}}\bar{a}$	$(\bar{a}\times\bar{b})_x$	$(\bar{a}\times\bar{b})_y$	$(\bar{a}\times\bar{b})_z$	$\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$
A1*D1/K1+B1*E1/K1 +C1*F1/K1=M1/K1	B1*F1-C1*E1	C1*D1-A1*F1	A1*E1-B1*D1	SQRT(O1^2+ P1^2+R1^2)
1,0932	-19	-8	10	22,9129

T	U	V	W	X
$cos(\bar{a},\bar{b})$	$\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$	$[\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})]_x$	$[\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})]_y$	$[\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})]_z$
M1/(J1*K1)	G1*O1+H1*P1+I1*R1	H1*R1-I1*P1	I1*O1-G1*R1	G1*P1-H1*O1
0,2922	30	10	20	35

Conform rezultatelor din tabel, mărimile cerute sunt:

$\bar{a}\cdot\bar{b}=7$; $pr_{\bar{b}}\bar{a}=1{,}0932$;

$\bar{a}\times\bar{b}=-19\bar{i}-8\bar{j}+10\bar{k}$;

$\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=22{,}9129$;

$cos(\bar{a},\bar{b})=0{,}2922$;

$\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=30$;

$\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=10\bar{i}+20\bar{j}+35\bar{k}$

1.1.2 ***Se consideră*** *punctele $A_1(1,-2,3)$, $A_2(2,4,1)$, $A_3(4,5,6)$.* ***Se cere****:*

- *să se exprime analitic vectorii $\overline{A_1A_2}$ si $\overline{A_2A_3}$,*
- *produsul lor scalar al vectorilor $\overline{A_1A_2}$ si $\overline{A_2A_3}$,*
- *să se calculeze unghiurile celor doi vectori.*

Problema s-a rezolvat folosind relațiile prezentate în rezumatul de teorie cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.

ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL MICROSOFT EXCEL ŞI REZULTATELE OBȚINUTE PENTRU PROBLEMA 1.1.2

DATE DE INTRARE **DATE DE IEŞIRE**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Nr.	x_{A1}	y_{A1}	z_{A1}	x_{A2}	y_{A2}	z_{A2}	x_{A3}	y_{A3}	z_{A3}	$(\overline{A_1A_2})_x$	$(\overline{A_1A_2})_y$	$(\overline{A_1A_2})_z$
0										D1-A1	E1-B1	F1-C1
1	1	-2	3	2	4	1	4	5	6	1	6	-2

M	N	O	P	R	S	T
$(\overline{A_2A_3})_x$	$(\overline{A_2A_3})_y$	$(\overline{A_2A_3})_z$	$\lvert\overline{A_1A_2}\rvert$	$\lvert\overline{A_2A_3}\rvert$	$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_2A_3}$	$\cos\alpha$
G1-D1	H1-E1	I1-F1	SQRT(J1^2+K1^2+ L1^2)	SQRT(M1^2+N1^2 + O1^2)	J1*M1+K1*N1+ L1*O1	S1/(P1*R1)
2	1	5	6,4031	5,4772	-2	-0,057

Conform rezultatelor din tabel, expresiile analitice ale celor doi vectori, produsul lor scalar şi unghiul dintre vectori, conform rezultatelor din tabel sunt:

$$\overline{A_1A_2} = \bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}; \qquad \overline{A_2A_3} = 2\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$$

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_2A_3} = -2; \qquad \cos\alpha = -0{,}057$$

PROBLEME PROPUSE

Acelaşi enunţ ca la probleme 1.1.1 pentru vectorii:

1.1.3. $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} - \bar{j}$

1.1.4. $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}; \quad \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

1.1.5. $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 5\bar{j} + \bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + 4\bar{j}$

1.1.6. $\bar{a} = 2\bar{i}; \quad \bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$

1.1.7. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 5\bar{j} - 4\bar{k}; \quad \bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j}$

1.1.8. $\bar{a} = 2\bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 6\bar{j} + \bar{k}; \quad \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}$

Acelaşi enunţ ca la probleme 1.1.2 pentru punctele:

1.1.9. *$A_1(0,1,3)$, $A_2(2,4,6)$, $A_3(-4,5,8)$.*

1.1.10. *$A_1(1,-5,3)$, $A_2(2,4,-4)$, $A_3(4,5,0)$.*

1.1.11. *$A_1(1,-2,0)$, $A_2(7,4,-1)$, $A_3(4,0,6)$.*

1.1.12. *$A_1(1,-6,3)$, $A_2(8,0,1)$, $A_3(0,5,6)$.*

1.2 REDUCEREA FORȚELOR CONCURENTE COPLANARE

PROBLEME REZOLVATE

1.2.1. ***Se consideră*** *un punct material asupra căruia acționează un sistem de 4 forțe coplanare* $\{\overline{F}_i\}_{i=1,..4}$ *(fig. 1.2.1.a) având modulele şi direcțiile față de Ox date de:* $|\overline{F}_1|=8\sqrt{2}F,\ \alpha_1=\frac{\pi}{4};\ |\overline{F}_2|=2F,\ \alpha_2=\pi;\ |\overline{F}_3|=3F,\ \alpha_3=-\frac{\pi}{2};\ |\overline{F}_4|=2\sqrt{3}F,\ \alpha_4=-\frac{\pi}{3}$

Se cere *să se determine rezultanta celor patru forțe (ca mărime, direcție şi sens).*

Rezolvare:

Pentru a determina rezultanta celor patru forțe din *fig. 1.2.1.a* se aplică teorema proiecțiilor pe axele sistemului *Oxy*: mărimea proiecției rezultantei după cele două direcții *Ox* şi *Oy* este egală suma mărimilor proiecțiilor forțelor:

$$X=\sum_{i=1}^{4} X_i=|\overline{F}_1|\cos\frac{\pi}{4}+|\overline{F}_2|\cos\pi+|\overline{F}_3|\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+|\overline{F}_4|\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=(6+\sqrt{3})F$$

$$Y=\sum_{i=1}^{4} Y_i=|\overline{F}_1|\sin\frac{\pi}{4}+|\overline{F}_2|\sin\pi+|\overline{F}_3|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+|\overline{F}_4|\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2F$$

Expresia anlitică a rezultantei celor trei forțe şi mărimea ei sunt date de:

$$\overline{R}=X\bar{i}+Y\bar{j}=(6+\sqrt{3})F\bar{i}+2F\bar{j};$$

$$|\overline{R}|=R=\sqrt{X^2+Y^2}=F\sqrt{43+12\sqrt{3}}$$

Direcția şi sensul rezultantei sunt date de mărimea unghiului α_R pe care aceatsa îl face cu axa *Ox* (fig 1.2.1.b) :

$$tg\alpha_R=\frac{Y}{X}=\frac{2}{6+\sqrt{3}}=0{,}258;\quad \alpha_R=14{,}502^0$$

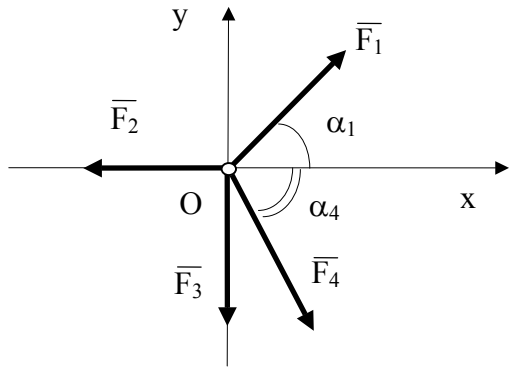


Fig. 1.2.1.a

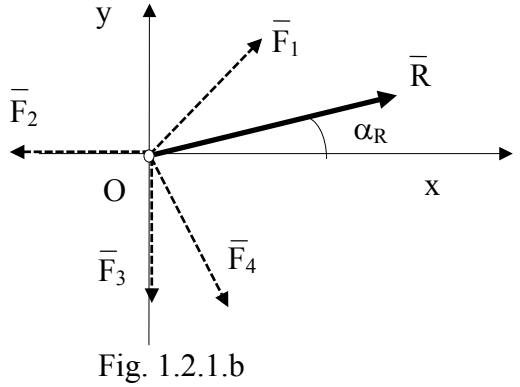


Fig. 1.2.1.b

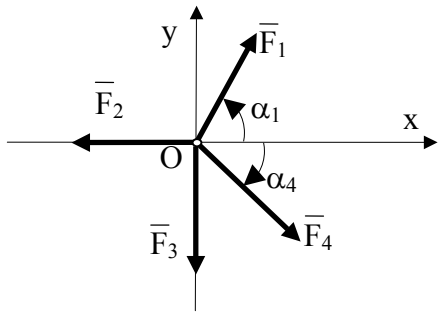


Fig. 1.2.2.

1.2.2 *Asupra unui punct material O acţionează forţele concurente şi coplanare* $\{\overline{F}_i\}_{i=1,..4}$ *având mărimile, direcţiile şi sensurile din fig.S1.2.2.*

Se cunosc:

$$|\overline{F}_1| = 4\sqrt{3}F,\ \ \alpha_1 = \frac{\pi}{6};\qquad |\overline{F}_2| = 2F,\ \ \alpha_2 = \pi$$

$$|\overline{F}_3| = 6F,\ \ \alpha_3 = \frac{3\pi}{2};\qquad |\overline{F}_4| = 2\sqrt{2}F;\ \alpha_4 = -\frac{\pi}{4}$$

Se cere: Expresia analitică a rezultantei forţelor şi unghiul pe care îl face aceasta cu axa Ox .

Răspuns: $\overline{R} = 2\sqrt{3}P\bar{i} - 2P\bar{j}$; $\quad \alpha_R = -\frac{\pi}{6}$

Problema s-a rezolvat şi cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.

ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL EXCEL ŞI REZULTATE OBŢINUTE PENTRU PROBLEMA 1.2.2

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H
Nr.	**F_1/F**	**F_2/F**	**F_3/F**	**F_4/F**	**α_1**	**α_2**	**α_3**	**α_4**
0								
1	6,9292	2	6	2,8284	$\pi/6$	π	$3\pi/2$	$-\pi/4$

DATE DE IESIRE

J	K	L	M	N
X/F	**Y/F**	**R/F**	**tg α_R**	**α_R (rad)**
A1*cosE1+B1*cosF1+ C1*cosG1+D1*cosH1	A1*sinE1+B1*sinF1+ C1*sinG1+D1*sinH1	SQRT (J1^2+K1^2)	K1/J1	arctgM1
3,4641 ($2\sqrt{3}$)	-2	4	-0,5773	-0,5236 (-π/6)

1.3 REDUCEREA FORȚELOR CONCURENTE SPAȚIALE

PROBLEME REZOLVATE

1.3.1. *Asupra unui punct material M acționează un sistem de 4 forțe concurente* $\{\overline{F}_i\}_{i=1,..4}$ *având modulele:* $|\overline{F}_1| = 2\sqrt{10}F, |\overline{F}_2| = 5F, |\overline{F}_3| = 3\sqrt{37}F, |\overline{F}_4| = 4\sqrt{5}F$ *şi direcțiile date de muchiile sau diagonalele unui paralelipiped dreptunghic ca în fig. S1.3.1(M≡O) ; se cunosc: OA=a, OC=2a,* $OO'=6a$.

Se cere să se determine rezultanta forțelor (mărimea, direcția şi sensul).

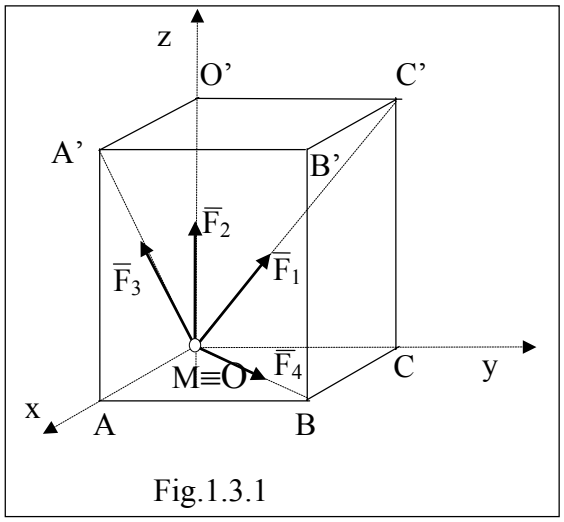


Fig.1.3.1

Rezolvare:

Expresiile analitice ale celor patru forțe față de sistemul de referință *Oxyz* ales *(M≡O)* sunt:

$$\overline{F}_1 = |\overline{F}_1| \cdot vers\overline{F}_1 = |\overline{F}_1| \cdot vers\overline{OC'} =$$

$$= 2\sqrt{10}F \cdot \frac{x_{c'}\bar{i} + y_{c'}\bar{j} + z_{c'}\bar{k}}{\sqrt{x_{c'}^2 + y_{c'}^2 + z_{c'}^2}} = 2F\bar{j} + 3F\bar{k}$$

$$\overline{F}_2 = |\overline{F}_2| \cdot vers\overline{F}_2 = |\overline{F}_2| \cdot vers\overline{OO'} = 5F\bar{k}$$

$$\overline{F}_3 = |\overline{F}_3| \cdot vers\overline{F}_3 = |\overline{F}_3| \cdot vers\overline{OA'} = 3\sqrt{37}F \frac{a\bar{i} + 6a\bar{k}}{\sqrt{a^2 + (6a)^2}} = 3F\bar{i} + 18F\bar{k}$$

$$\overline{F}_4 = |\overline{F}_4| \cdot vers\overline{F}_4 = |\overline{F}_4| \cdot vers\overline{OB} = 4\sqrt{5}F \frac{a\bar{i} + 2a\bar{j}}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = 4F\bar{i} + 8F\bar{j}$$

Expresia analitică a rezultantei este:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F}_i = 7F\bar{i} + 10F\bar{j} + 29F\bar{k}$$

Proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de coordonate *Oxyz* sunt:

$X=7F, \quad Y=10F, \quad Z=29F.$

Mărimea rezultantei este dată de:

$$|\overline{R}| = R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 3\sqrt{110}\ F\ .$$

Direcția şi sensul rezultantei este dată de unghiurile pe care le face cu axele sistemului de coordonate:

$$\cos\alpha_R = 0{,}222\ ; \qquad \alpha_R = 77{,}145^0$$

$$\cos\beta_R = 0{,}318; \qquad \beta_R = 71{,}469^0$$

$$\cos\gamma_R = 0{,}921; \qquad \gamma_R = 22{,}827^0$$

PROBLEME PROPUSE

1.3.2. *Asupra unui punct material M acţionează forţele concurente* $\{\overline{F}_i\}_{i=1,..4}$ *având mărimile:* $|\overline{F}_1| = 3\sqrt{68}F, |\overline{F}_2| = 2\sqrt{13}F, |\overline{F}_3| = 4\sqrt{73}F, |\overline{F}_4| = 6F$.

direcţiile şi sensurile fiind date de muchiile sau diagonalele paralelipipedului dreptunghic din fig. 1.3.2 (M≡O); se cunosc: OA=3a, OC=8a, $OO'=2a$.

Se cere expresia analitică a rezultantei forţelor şi unghiurile pe care îl face aceasta cu axele de coordonate.

$$\overline{R} = 18F\bar{i} + 56F\bar{j} + 16F\bar{k};\ |\overline{R}| = 60{,}959F;\ \alpha_R = 72{,}825^0; \beta_R = 23{,}270^0; \gamma_R = 74{,}783^0;$$

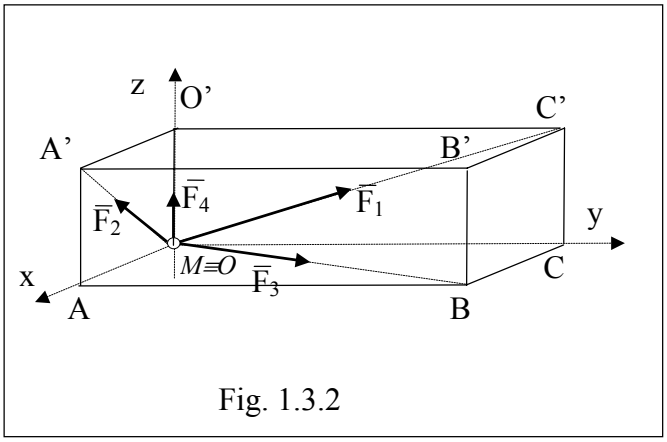


Fig. 1.3.2

1.3.3. *Acelaşi enunţ ca la problema 1.3.2 (fig. 1.3.3) cu datele:*

$|\overline{F}_1| = \sqrt{29}F, |\overline{F}_2| = 4F, |\overline{F}_3| = \sqrt{34}F, |\overline{F}_4| = \sqrt{13}F$, *OA=3a, OC=2a, OO'=5a.*

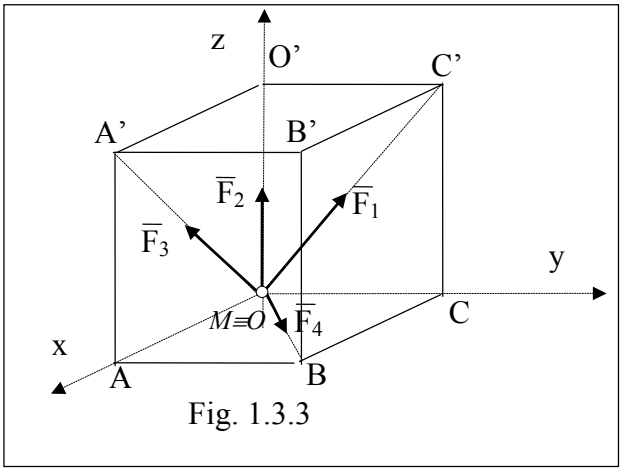


Fig. 1.3.3

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F}_i = 6F\bar{i} + 4F\bar{j} + 14F\bar{k};\ |\overline{R}| = 15{,}748F;\ \alpha_R = 67{,}604^0,\ \beta_R = 75{,}285^0, \gamma_R = 27{,}252^0$$

Problema 1.3.2 s-a rezolvat şi cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.

ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL MICROSOFT EXCEL PENTRU PROBLEMA 1.3.2

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	x_1/a	y_1/a	z_1/a	x_2/a	y_2/a	z_2/a	x_3/a	y_3/a	z_3/a	x_4/a	y_4/a	z_4/a	F_1/F
1	0	8	2	3	0	2	3	8	0	0	0	2	24,74

DATE DE IESIRE

N	O	P	Q	R	S
F_2/F	F_3/F	F_4/F	$(versF_1)_x$	$(versF_1)_y$	$(versF_1)_z$
			A1/[SQRT(A1^2+ B1^2+C1^2)]	B1/[SQRT(A1^2+ B1^2+C1^2)]	C1/[SQRT(A1^2+ B1^2+C1^2)]
7,2111	34,1760	6	0	0,9701	0,2425

T	U	V	W	X	Y
$(versF_2)_x$	$(versF_2)_y$	$(versF_2)_z$	$(versF_3)_x$	$(versF_3)_y$	$(versF_3)_z$
D1/SQRT(D1^2 +E1^2+F1^2)	E1/SQRT(D1^2+E 1^2+F1^2)	F1/SQRT(D1^2+E 1^2+F1^2)	G1/[SQRT(G1^2+ H1^2+I1^2)]	H1/[SQRT(G1^2+ H1^2+I1^2)]	I1/[SQRT(G1^2+ H1^2+I1^2)]
0,8320	0	0,5547	0,3511	0,9363	0

Z	AA	AB	AC	AD	AE
$(versF_4)_x$	$(versF_4)_y$	$(versF_4)_z$	X/F	Y/F	Z/F
J1/SQRT(J1^2+ K1^2+L1^2)	K1/SQRT(J1^2+K 1^2+L1^2)	L1/SQRT(J1^2+ K1^2+L1^2)	M1*Q1+N1*T1+ O1*W1+P1*Z1	M1*R1+N1*U1+ O1*X1+P1*AA1	M1*S1+N1*V1+ O1*Y1+P1*AB1
0	0	1	18	56	16

AF	AG	AH	AI
R/F	α_R	β_R	γ_R
SQRT(AC1^2+AD1^2+ AE1^2)	arccos(AC1/AF1)	arccos(AD1/AF1)	arccos(AE1/AF1)
60,959	$72,825^0$	$23,270^0$	$74,783^0$

1.4. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

REZUMAT DE TEORIE

a. Principiul paralelogramului

Fiind date două forțe $\overline{F}_1$ *si* $\overline{F}_2$ care acționează asupra unui punct material liber A, *principiul paralelogramului* postulează că *efectul celor două forțe este acelaşi cu al unei forțe rezultante* $\overline{R}$, *care este diagonala mare a paralelogramului având ca laturi forțele* $\overline{F}_1$ *si* $\overline{F}_2$ (fig. 1.4.1)

Sunt valabile următoarele relații:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2; \qquad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\,F_2\,\cos\alpha}; \qquad tg\,\beta = \frac{F_2 \sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha};$$

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{F_1}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{F_2}{\sin\beta}$$

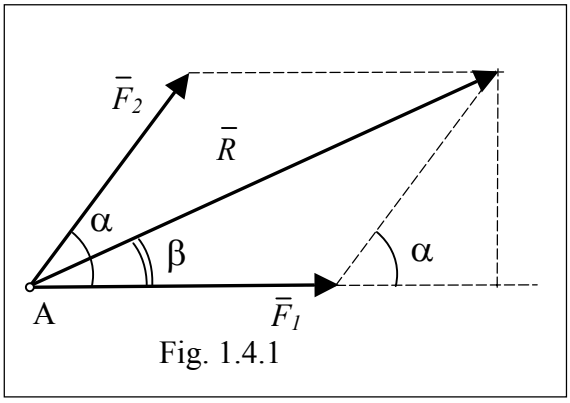


Fig. 1.4.1

b. Teorema proiecțiilor

Fiind dat un sistem de forțe, concurente într-un punct O din spațiu, $\{\overline{F}_i\}_{i=1.2,\ldots n}$ acesta se reduce (sau este echivalent) în punctul O cu o forță rezultantă $\overline{R}$, care se obține aplicând succesiv principiul paralelogramului enunțat mai sus: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$.

Dacă se notează cu X_i, Y_i , Z_i, proiecțiile unei forțe oarecare F_i a sistemului şi cu X, Y, Z proiecțiile forței rezultante $\overline{R}$ pe axele triedrului triortogonal drept Oxyz, atunci sunt valabile următoarele relații:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Aceste relații *teorema proiecțiilor care se enunță astfel:* proiecția rezultantei pe o direcție oarecare este egală cu suma proiecțiilor tuturor forțelor sistemului după acea direcție. Sunt valabile următoarele relații:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\sum X_i\right)^2 + \left(\sum Y_i\right)^2 + \left(\sum Z_i\right)^2}$$

c. Axioma legăturilor

Dacă asupra unui punct M din spațiu supus la legături acționează un sistem de forțe $\{\overline{F}_i\}_{i=1.2,\ldots n}$ (a cărui rezultantă se notează cu $\overline{R}^a$), *conform axiomei*

legăturilor orice legături geometrice pot fi întotdeauna suprimate şi înlocuite cu forţe corespunzătoare (a căror rezultantă se notează cu $\overline{R}^{leg}$).

Din punct de vedere geometric punctul material poate fi considerat ca un *punct material liber*, iar *din punct de vedere mecanic* constrângerile au fost înlocuite cu *forţe de legătură.*

Teorema echilibrului puctului material supus la legături: *condiţia necesară şi suficientă pentru ca unpunct material să rămână în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare şi de legătură este ca rezultanta lor să fie nulă:*

$$\overline{R}^{a} + \overline{R}^{leg} = 0$$

$$X^{a} + X^{leg} = 0;\ \ Y^{a} + Y^{leg} = 0;\ \ Z^{a} + Z^{leg} = 0;$$

Din punct de vedere al naturii forţelor de legătură, legăturile punctului material pot fi *legături fără frecare(ideale)* şi *legături cu frecare (reale).*

b. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare

Un punct material aflat pe o suprafaţă cu frecare nu va părăsi poziţia de repaus atât timp cât rezultanata forţelor aplicate se află în interiorul conului de frecare (având axa după normala la suprafaţă şi unghiul la vârf 2φ) . Forţa de frecare $\overline{T}$ respectă următoarele legi ale frecării uscate (legile lui COULOMB):

a. modulul forţei de frecare $\left|\overline{T}_{max}\right|$ este proporţional cu reacţiunea normală *N*;

b. modulul $\left|\overline{T}_{max}\right|$ depinde de natura corpurilor şi de starea suprafeţelor de contact: $\left|\overline{T}_{max}\right| = \mu N$ *unde* $\mu = tg\varphi$ este coeficientul de frecare de alunecare, iar φ este unghiul de frecare;

c. modulul $\left|\overline{T}_{max}\right|$ nu depinde de mărimea suprafeţei de contact. Sensul forţei de frecare de alunecare se opune totdeauna tendinţei de deplasare.

PROBLEME REZOLVATE

1.4.1. ***Se consideră*** *o sferă M de greutate G care se reazemă fără frecare pe un plan înclinat cu unghiul α şi este prinsă printr-un fir de un punct A ; firul face cu verticala unghiul β (vezi fig. 1.4.1.a).*

Se cere *să se detremine mărimea reacţiunii normale $\overline{N}$ şi a tensiunii din fir $\overline{S}$.*

Rezolvare:

Ecuaţia vectorială de echilibru după introducerea forţelor de legătură (conform axiomei legăturilor) se scrie :

$$\overline{G} + \overline{S} + \overline{N} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Alegând axele Ox şi Oy în mod convenabil (fig.1.4.1.b) şi proiectând pe acestea ecuația vectorială de echilibru, se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\cos\alpha - S\sin\beta = 0 \\ N\sin\alpha + S\cos\beta - G = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

Înmulțind, prima ecuație cu $cos\beta$ şi a doua cu $sin\beta$ şi însumându-le membru cu membru se obține:

$$N = G\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \quad ; \quad S = G\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)} \qquad (c)$$

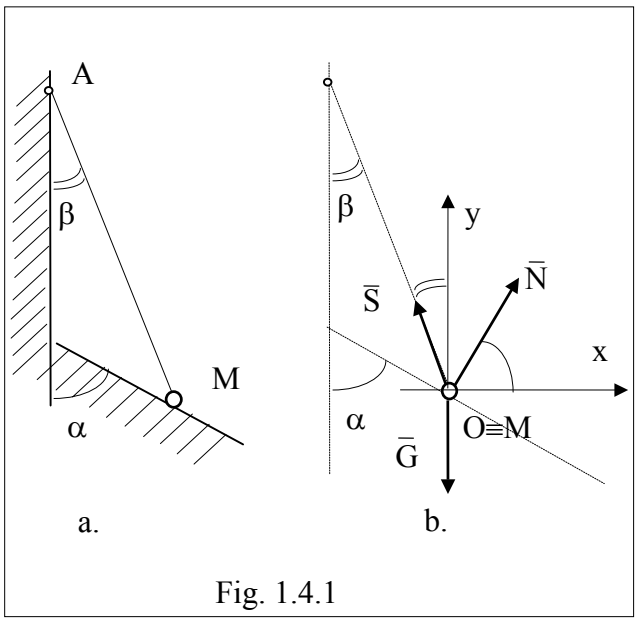


Fig. 1.4.1

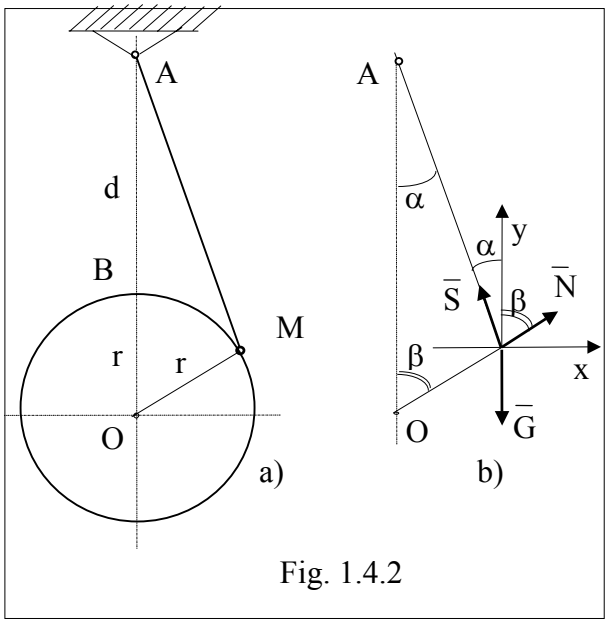


Fig. 1.4.2

1.4.2. ***Se consideră*** *o bilă de greutate G care se reazemă pe suprafața unei sfere de rază r, fiind legată cu un fir de lungime AM= ℓ de punctul fix A aflat la distanța AB =d , față de suprafața sferei (fig.1.4.2.a).*

Se cere *mărimea tensiunii din fir S şi a reacțiunii N.*

Rezolvare:

Ecuația vectorială de echilibru se scrie: $\overline{G} + \overline{S} + \overline{N} = 0$ (a)

Dacă se introduc unghiurile α şi β şi se aleg convenabil axele *Ox* şi *Oy* (ca în fig.S1.5.2.b) condiția de echilibru se scrie:

$$\begin{matrix} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -S\sin\alpha + N\sin\beta = 0 \\ S\cos\alpha + N\cos\beta - G = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

Multiplicând prima ecuație (b) cu $cos\beta$ şi a doua cu $sin\beta$ şi însumându-le membru cu membru se obține:

$$N = G\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \; ; \quad S = G\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (c)$$

Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul OAM, avem:

$$\frac{\ell}{\sin\beta}=\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{d+r}{\sin(\alpha+\beta)}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{r}{d+r};\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\ell}{d+r}$$

deci se obține: $N=G\dfrac{r}{d+r}$; $S=G\dfrac{\ell}{d+r}$ (d)

1.4.3. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (coeficientul de frecare fiind μ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare prin inelele fixe A_1 şi A_2 (fig.1.4.3). La capetele firelor sunt legare două corpuri de greutăți G_1 şi G_2 .* ***Se cere*** *să se determine raportul greutăților G_1/G_2 pentru ca inelul să rămână în repaus pentru un unghi θ dat.*

Rezolvare:

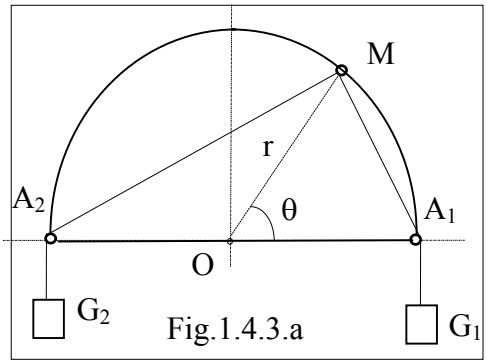


Fig.1.4.3.a

a) Se consideră mai întâi că inelul *M* are tendința de alunecare spre punctul A_1 (fig. 1.4.3.b); se aleg ca axe de coordonate tangenta şi normala la cerc în punctul M

Ecuația de echilibru se scrie:

$$\overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{T}+\overline{N}=0\ ; \qquad (a)$$

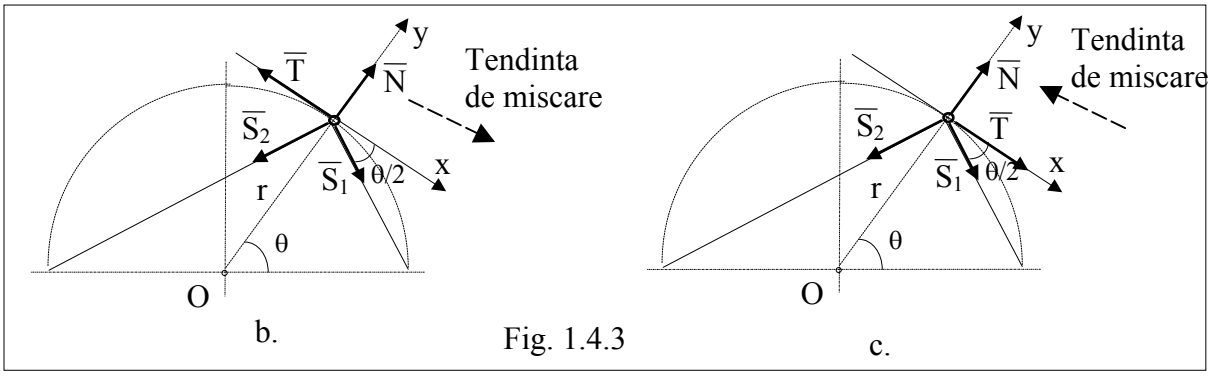


Fig. 1.4.3

sau în proiecții pe axe:

$$\sum X_i=0\Rightarrow S_1\cos\frac{\theta}{2}-S_2\sin\frac{\theta}{2}-T=0$$
$$\sum Y_i=0\Rightarrow -S_1\sin\frac{\theta}{2}-S_2\cos\frac{\theta}{2}+N=0 \qquad (b)$$

Condiția fizică a frecării este: $\left|\overline{T}\right|\le\mu\left|\overline{N}\right|$. (c)

Din ecuațiile (b) rezultă:

$$T=S_1\cos\frac{\theta}{2}-S_2\sin\frac{\theta}{2};\qquad N=S_1\sin\frac{\theta}{2}+S_2\cos\frac{\theta}{2} \qquad (d)$$

care introduse în (c) şi ținînd seama că tensiunile din fir pentru cele două ramuri ale firului au mărimile $S_1=G_1$ şi $S_2=G_2$, conduc la:

$$\frac{G_1}{G_2} \le \frac{sin\frac{\theta}{2}+\mu\, cos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}-\mu\, sin\frac{\theta}{2}} \qquad (e)$$

b. Se consideră acum cealaltă tendință de alunecare a inelului M spre punctul A_2 (fig. 1.4.3.c), ecuațiile de echilibru se scriu analog cu cele din primul caz, schimbând semnul din fața lui μ şi sensul inegalității (e)

$$\frac{G_1}{G_2} \ge \frac{sin\frac{\theta}{2}-\mu\, cos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}+\mu\, sin\frac{\theta}{2}} \qquad (f)$$

Deci valorile pe care le poate lua raportul G_1 / G_2, sunt cuprinse în intervalul:

$$\frac{sin\frac{\theta}{2}-\mu\, cos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}+\mu\, sin\frac{\theta}{2}} \le \frac{G_1}{G_2} \le \frac{sin\frac{\theta}{2}+\mu\, cos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}-\mu\, sin\frac{\theta}{2}}, \qquad (g)$$

care se mai scrie sub forma:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}-\varphi\right) \le \frac{G_1}{G_2} \le tg\left(\frac{\theta}{2}+\varphi\right) \qquad (h)$$

1.4.4. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare pe un cerc de rază r. De inel sunt legate două fire care trec prin două inele fixe în A_1 şi A_2 fără frecare. La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutăți G_1 şi G_2 (ca în fig.1.4.4.a).* ***Se cere*** *raportul G_1 / G_2 pentru ca punctul M să rămână în repaus în poziția dată de unghiul θ, dacă se consideră cunoscute coeficientul de frecare μ şi θ.*

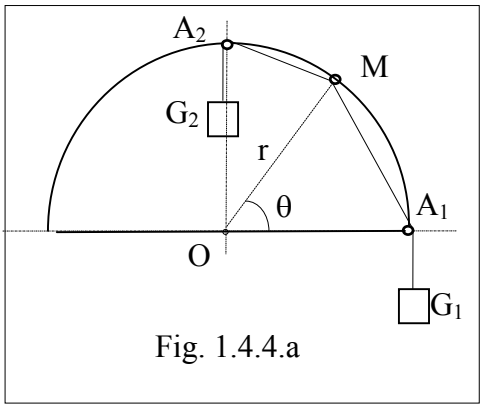


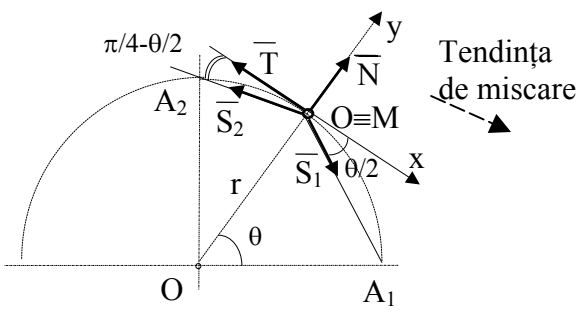
Fig. 1.4.4.a

Rezolvare:

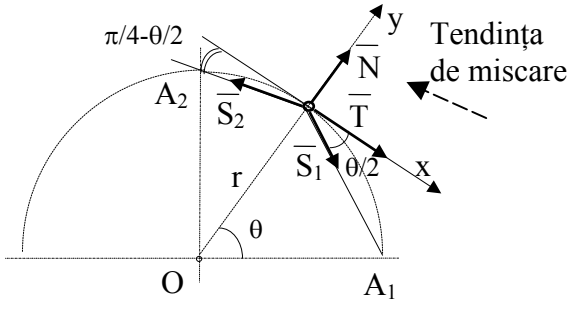
1. Se consideră mai întâi că inelul *M* are tendința de alunecare spre punctul A_1 (fig. 1.4.4.b); se aleg ca axe de coordonate tangenta şi normala la cerc în punctul M

Ecuația de echilibru se scrie:

$$\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{T} + \overline{N} = 0 \ ; \qquad (a)$$



b.



c.

Fig. 1.4.4.

sau în proiecții pe axe:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow S_1 \cos\frac{\theta}{2} - S_2 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) - T = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_1 \sin\frac{\theta}{2} - S_2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + N = 0 \qquad \text{(b)}$$

condiția fizică a frecării: $T \le \mu N$, (c)

Înlocuind în (c) expresiile lui N şi T rezulatate din ecuațiile (b) avem:

$$S_1 \cos\frac{\theta}{2} - S_2 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \le \mu\left[S_1 \sin\frac{\theta}{2} + S_2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \right] \qquad \text{(d)}$$

şi ținînd seama că tensiunile din fir pentru cele două ramuri ale firului au mărimile: $S_1=G_1$ şi $S_2=G_2$ se obține:

$$\frac{G_1}{G_2} \le \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + \mu \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2} - \mu \sin\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(e)}$$

b) Se consideră cealaltă tendință de alunecare a inelului M (spre A_2, fig.1.4.4.c), ecuațiile de echilibru se scriu analog, obținându-se, prin schimbarea semnului din fața lui μ şi a sensului inegalității (e) relația:

$$\frac{G_1}{G_2} \ge \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) - \mu \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2} + \mu \sin\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(f)}$$

Condiția finală de echilibru deci se scrie:

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) - \mu \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2} + \mu \sin\frac{\theta}{2}} \le \frac{G_1}{G_2} \le \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + \mu \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2} - \mu \sin\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(g)}$$

sau forma echivalentă: $\frac{\cos(\pi/4 - \theta/2 + \varphi)}{\cos(\theta/2 - \varphi)} \le \frac{G_1}{G_2} \le \frac{\cos(\pi/4 - \theta/2 - \varphi)}{\cos(\theta/2 + \varphi)}$ (h)

1.4.5. *Culisa M de greutate G_1 se poate deplasa cu frecare pe bara verticală OB, coeficientul de frecare de alunecare fiind cunoscut: μ Culisa este legată de greutatea G_2 prin intermediul unui fir şi a unui scripete fără frecare A. Se cunosc: AB = a şi BM = h* (fig.1.4.5.a). *Se cere greutatea G_2 pentru ca echilibrul să aibă loc în poziția din figură.*

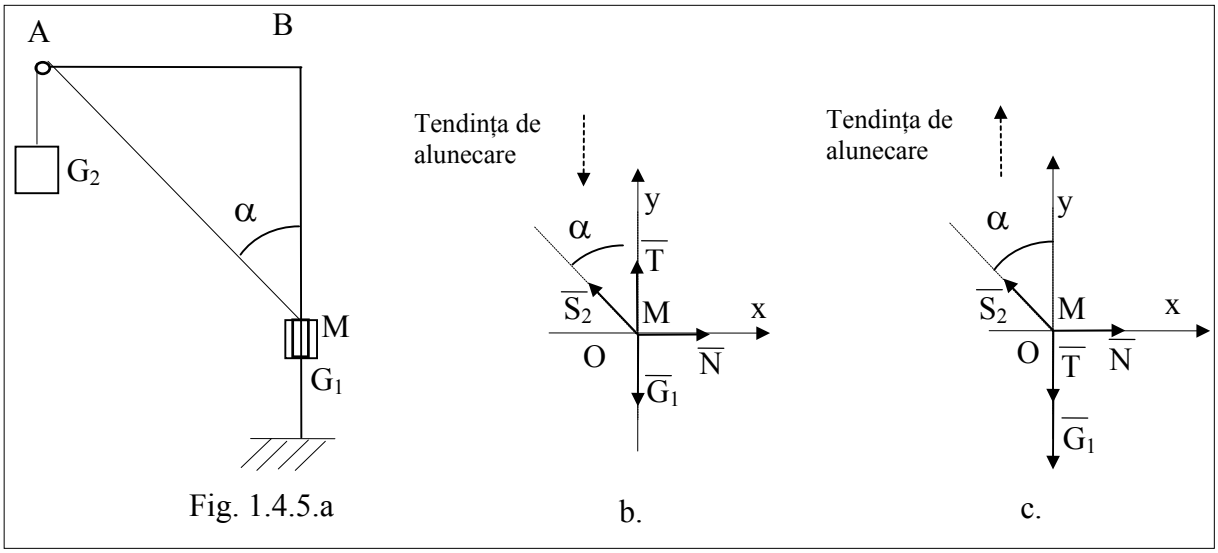


Fig. 1.4.5.a b. c.

Rezolvare:

a) Față de sistemul de axe *Oxy,* pentru tendința de deplasare a culisei în jos (fig. 1.4.5.b) forțele care acționează asupra culisei sunt indicate în figură; ecuațiile de echilibru în proiecții pe cele două axe se scriu:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N - G_2 \sin\alpha = 0 \\ T + G_2 \cos\alpha - G_1 = 0 \end{cases} \qquad (a)$$

$T \le \mu N$, condiția fizică a frecării (b)

ținând seama că tensiunea din fir este $S_2=G_2$, rezultă:

$$G_2 \ge \frac{G_1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \qquad (c)$$

b) Pentru tendința de deplasare în sus a culisei (fig. 1.4.5.c) forța de frecare $\overline{T}$ acționează în sens invers față de primul caz, ecuațiile de echilibru se scriu analog cu cele din primul caz, schimbând în relația (c) semnul din fața lui μ şi sensul inegalității: $G_2 \le \frac{G_1}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}$ (d)

Condiția finală de echilibru se scrie:

$$\frac{G_1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \le G_2 \le \frac{G_1}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \qquad (e)$$

sau sub forma echivalentă:

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h+\mu a}\cdot G_1 \le G_2 \le \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h-\mu a}\cdot G_1 \qquad \text{(f)}$$

PROBLEME PROPUSE

1.4.6. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (μ coeficientul de frecare) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate: un corp de greutate G_3 şi două fire care trec fără frecare peste inelele fixe A_1 şi A_2 (fig.1.4.6). La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutăţi G_1 şi G_2.*

Se cere *raportul greutăţilor G_1 / G_2 pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul θ dat.*

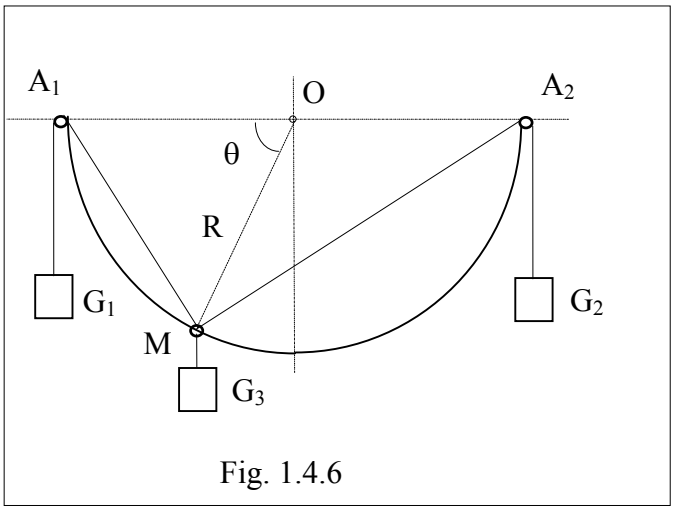


Fig. 1.4.6

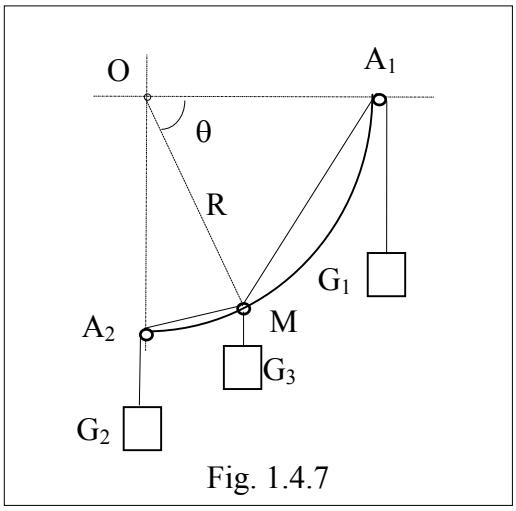


Fig. 1.4.7

1.4.7. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (μ coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate: un corp de greutate G_3 şi două fire care trec fără frecare peste inelele fixe A_1 şi A_2 (fig.1.4.7). La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutăţi G_1 şi G_2.*

Se cere *raportul greutăţilor G_1 / G_2 pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul θ dat.*

1.4.8. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (μ_1 coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare peste inelele fixe A_1 şi A_2 . La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutăţi G_1 şi G_2 , firul care susţine corpul de greutate G_2 fiind trecut cu frecare (μ_2 coeficientul de frecare) peste un cilindru fix ($\varphi=\pi/2$)(fig.1.4.8).* ***Se cere*** *raportul greutăţilor G_1 / G_2 pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul θ dat.*

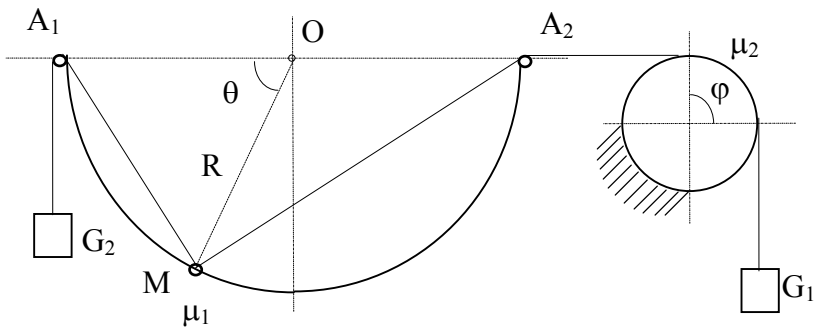


Fig. 1.4.8

1.4.9. ***Se consideră*** *un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (μ_1 coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare peste inelele fixe A_1 şi A_2 . La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutăţi G_1 şi G_2 , firul care susţine corpul de greutate G_2 fiind trecut cu frecare (μ_2 coeficientul de frecare) peste un cilindru fix ($\varphi=\pi/2$)(fig.1.4.9).* ***Se cere*** *raportul greutăţilor G_1 / G_2 pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul θ dat.*

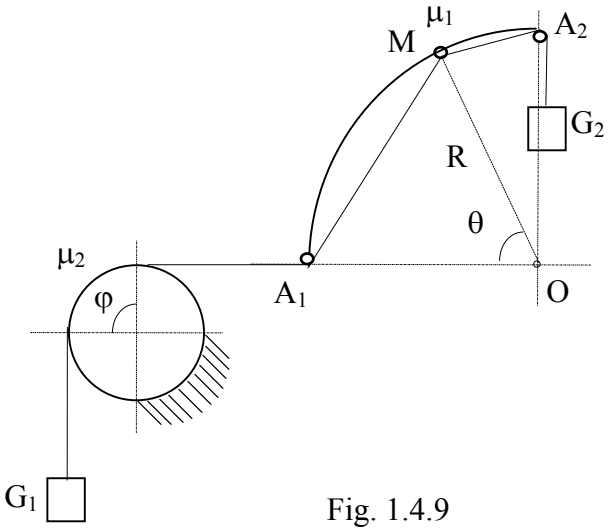


Fig. 1.4.9

CAPITOLUL II
REDUCEREA FORȚELOR APLICATE SOLIDULUI RIGID

REZUMAT DE TEORIE

a. Momentul unei forțe în raport cu un punct

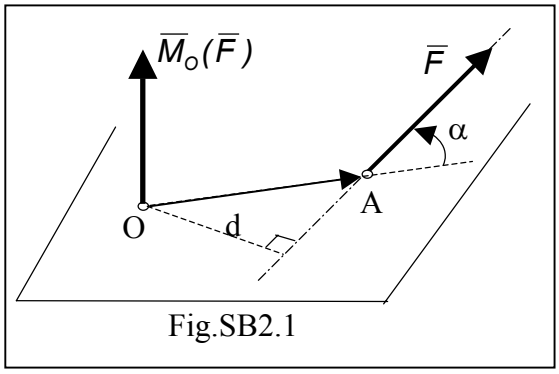


Fig.SB2.1

O noțiune foarte importantă utilizată în Mecanica corpului rigid este aceea *de moment al unei forțe* $\overline{F}$ *față de un punct oarecare O* (forța $\overline{F}$ este aplicată într-un punct oarecare A din spațiu O ≠ A) care se defineşte prin :

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{OA} \times \overline{F}$$

Din definiția produsului vectorial dată în capitolul I , rezultă că momentul unei forțe $\overline{F}$ față de un punct O, este un vector aplicat în punctul O, perpendicular pe vectorii $\overline{OA}$ *si* $\overline{F}$, sensul său fiind determinat de sensul de rotație al lui $\overline{F}$, după regula şurubului drept iar mărimea sa dată de:

$$\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right| = \left|\overline{OA}\right| \cdot \left|\overline{F}\right| \cdot \sin\alpha = F \cdot d$$

unde: α este ungiul dintre $\overline{OA}$ *si* $\overline{F}$ iar d este distanța de la punctul O la suportul forței $\overline{F}$ (brațul forței, vezi fig. SB2.1).

Dacă punctul O este originea sistemului cartezian de axe, punctul A are coordonatele A(x,y,z) iar expresia analitică a forței este: $\overline{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, atunci expresia analitică a momentului forței $\overline{F}$ față de O este:

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\bar{i} + (zX - xZ)\bar{j} + (xY - yX)\bar{k}$$

Componentele lui $\overline{M}_O(\overline{F})$: $L = yZ - zY;\ M = zX - xZ;\ N = xY - yX$,

reprezintă momentul forței $\overline{F}$ față de cele trei axe *Ox, Oy, Oz* (aşa cum rezultă din paragraful următor).

b. Momentul unei forțe în raport cu o axă oarecare

O altă noțiune importantă utilizată în Mecanica corpului rigid este aceea *de moment al unei forțe* $\overline{F}$ *față de o axă* Δ, care se defineşte ca proiecția momentului forței $\overline{F}$ față de un punct, care aparține axei Δ, pe această axă:

$$M_\Delta(\overline{F}) = pr_\Delta \overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{\delta} \cdot \overline{M}_O(\overline{F})$$

$$M_\Delta(\overline{F}) = \overline{\delta} \cdot (\overline{OA} \times \overline{F}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

unde: $\overline{\delta} = vers\Delta = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$

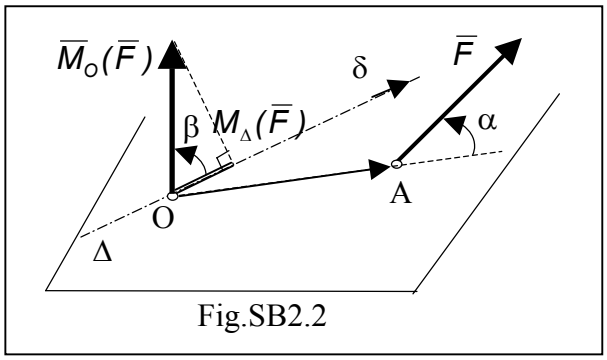


Fig.SB2.2

Se observă că dacă Δ coincide cu axa Ox:

$$\overline{\delta} = versOx = \overline{i}$$

momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Ox este: $M_{Ox} = yZ - zY = L$.

Analog: $M_{Oy} = zX - xZ = M;$ $M_{Oz} = xY - yX = N;$

c. Torsorul de reducere al unui sistem de forțe într- un punct

Dacă se consideră o forță $\overline{F}_i$ aplicată într-un punct A_i al unui rigid, efectul acestei forțe este acelaşi cu efectul celor două *elemente de reducere* a forței într-un punct O: forța $\overline{F}_i$ şi momentul forței în raport cu punctul O $\overline{M}_O(\overline{F}_i)$:

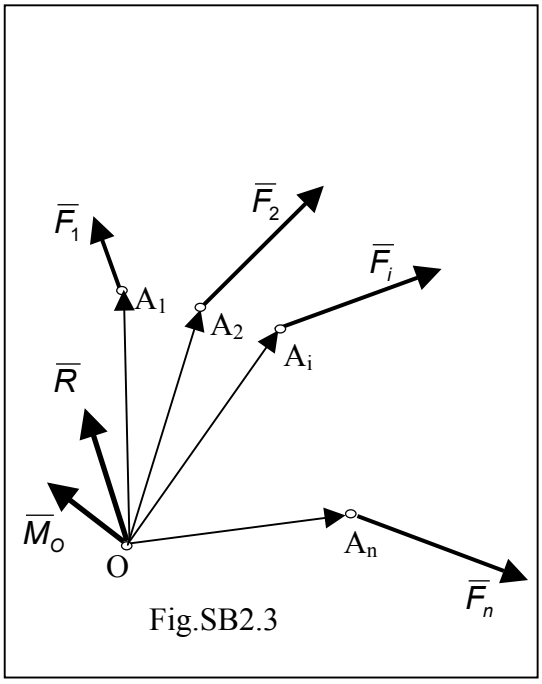


Fig.SB2.3

$$\overline{F}_i \ aplicata \ in \ A_i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \overline{F}_i \\ \overline{M}_O(\overline{F}_i) \end{matrix} \right\} aplicate \ in \ O$$

Dacă se consideră un sistem de forțe $\overline{F}_i$ aplicate în punctele $(A_i)_{i=1,2,\ldots n}$ şi se face reducerea pentru fiecare forță a sistemului în punctul O , prin însumarea forțelor şi momentelor concurente rezultate se obține un sistem echivalent cu sistemul dat format din două elemete (fig.SB2.3):

- Rezultanta: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$
- Momentul rezultant:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA}_i \times \overline{F}_i .$$

Perechea formată din $\overline{R}$ *si* $\overline{M}_O$ se numeşte *torsorul de reducere al sistemului de forţe în punctul O:* τ_O.

d. Torsor minimal. Axa centrală

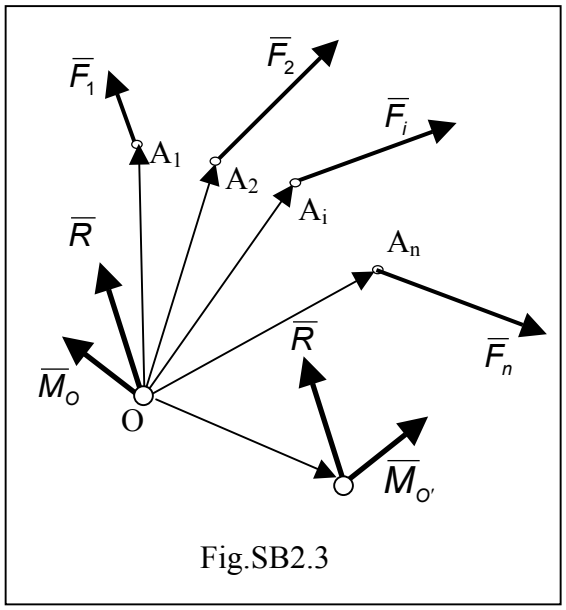


Fig.SB2.3

Dacă se consideră un alt punct O' în care se face reducerea sistemului de forțe (O'≠O) rezultanta $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$ nu se modifică (primul invariant) iar momentul rezultant se modifică conform relației:

$$\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{O'O} \times \overline{R} = \overline{M}_O - \overline{OO'} \times \overline{R}$$

Deci torsorii de reducere în O şi O' se scriu:

$$\tau_O : \begin{cases} \overline{R} \\ \overline{M}_O \end{cases}; \quad \tau_{O'} : \begin{cases} \overline{R} \\ \overline{M}_{O'} = \overline{M}_O - \overline{OO'} \times \overline{R} \end{cases}$$

Dacă se înmulţeşte scalar relaţia de mai sus cu $\overline{R}$, se obţine: $\overline{M}_{O'} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} = ct$; constanta acesta se numeşte *trinomul invariant* (al doilea invariant). Dacă se împarte trinomul invariant la modulul rezultantei se obţine proiecţia *momentului rezultant* pe direcţia rezultantei:

$$M_R = \overline{M}_O \cdot \overline{R} / |\overline{R}|$$

Pentru anumite puncte de reducere din spaţiu, torsorul de reducere este format din doi vectori coliniari *($\overline{R}$; $\overline{M}_R$)* şi se numeşte *torsor minimal:*

$$\tau_{min} : \begin{cases} \overline{R}; \qquad \overline{M}_R = \dfrac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|} \cdot \dfrac{\overline{R}}{|\overline{R}|} \end{cases}$$

Axă centrală reprezintă locul geometric al punctelor din spaţiu unde făcând reducerea sistemului de forţe, rezultanta şi momentul rezultant sunt doi vectori coliniari; axa centrală este dată de ecuaţiile:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

sau sub forma parametrică:

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{R} \times \overline{M_o}}{|\overline{R}|^2} + \lambda \overline{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda X + (YN - ZM) / R^2 \\ y = \lambda Y + (ZL - XN) / R^2 \\ z = \lambda Z + (XM - YL) / R^2 \end{cases}$$

2.1. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE COPLANARE

PROBLEME REZOLVATE

2.1.1. *Asupra cadrului dreptunghiular din figura 2.1.1.a având laturile* $OA=a$, $OC=2a$, *acționează forțele coplanare:* $F_1=F_2=\sqrt{2}F$ *înclinate cu unghiul* $\alpha=\pi/4$ *şi* $F_3=2F$ *ca în fig. 2.1.1.a.*

Se cer : 1) Torsorului de reducere în punctul O.

2) Ecuația suportului rezultantei $\overline{R}$, *prin tăieturi.*

Rezolvare :

1) Se scriu expresiile analitice ale vectorilor forțe:

$$\overline{F}_1=(F_1\cos\alpha)\bar{i}+(F_1\sin\alpha)\bar{j}=F(\bar{i}+\bar{j})$$
$$\overline{F}_2=-(F_2\cos\alpha)\bar{i}+(F_2\sin\alpha)\bar{j}=F(-\bar{i}+\bar{j}) \qquad (a)$$
$$\overline{F}_3=-F_3\bar{i}=-2F\bar{i}$$

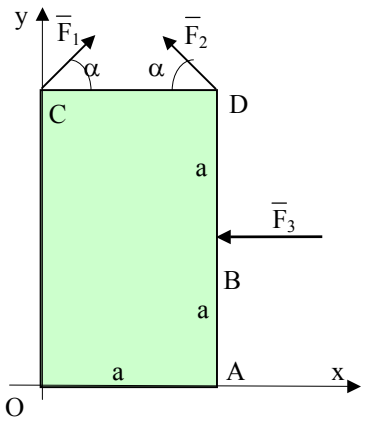


Fig. 2.1.1.a

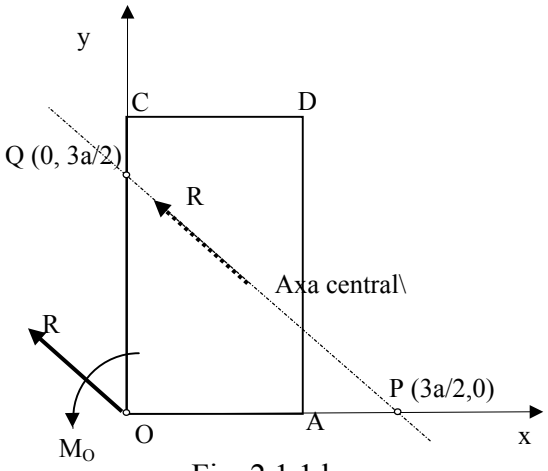


Fig. 2.1.1.b

Rezultanta sistemului este: $\overline{R}=\sum_{i=1}^{3}\overline{F}_i \quad \Rightarrow \quad \overline{R}=-2F\bar{i}+2F\bar{j}$ (b)

Momentul rezultant față de O este: (c)

$$\overline{M}_0=\sum_{i=1}^{3}\overline{M}_0(\overline{F}_i)=\overline{OC}\times\overline{F}_1+\overline{OD}\times\overline{F}_2+\overline{OB}\times\overline{F}_3$$

$$\overline{M}_0=2a\bar{j}\times F(\bar{i}+\bar{j})+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a & 2a & 0\\ -F & F & 0\end{vmatrix}+(a\bar{i}+a\bar{j})\times(-2F\bar{i}) \quad \Rightarrow \overline{M}_0=3aF\bar{k}$$

Torsorului de reducere în punctul O este deci:

$$\begin{cases}\overline{R}=-2F\bar{i}+2F\bar{j} & \Rightarrow X=-2F;\ Y=2F,\ \ Z=0\\ \overline{M}_0=3aF\bar{k} & \Rightarrow L=M=0;\ \ N=3aF\end{cases} \qquad (d)$$

2) Ecuația axei centrale: $\dfrac{L-yZ+zY}{X}=\dfrac{M-zX+xZ}{Y}=\dfrac{N-xY+yX}{Z}$

pentru valorile de mai sus se scrie:

$$\frac{2Fz}{-2F}=\frac{2Fz}{2F}=\frac{3aF-2Fx-2Fy}{0}\Rightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{3a}{2}\\ z=0\end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Axa centrală este o dreaptă definită prin tăieturile ei:

P(3a/2,0) şi Q(0,3a/2) (f)

Sistemul de forțe este echivalent cu torsorul $\tau(\overline{R},\overline{M}_O)$ de reducere în punctul O, sau sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică $\overline{R}$ situată pe axa centrală (întrucât în acest caz: $\overline{R}\perp\overline{M}_0=0$, *sau* $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$).

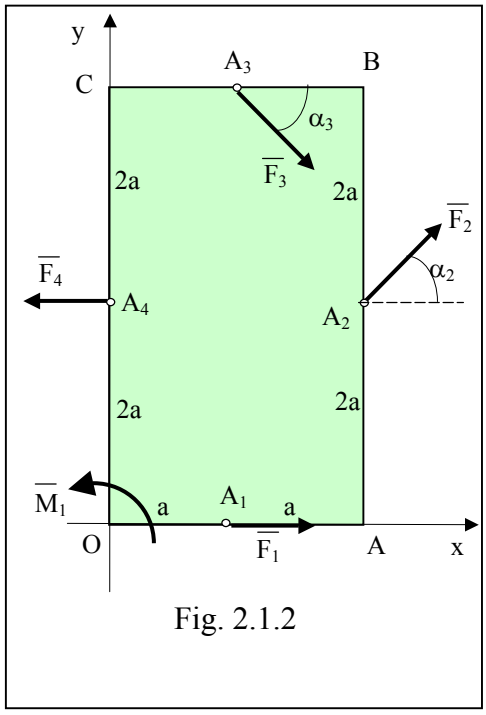
2.1.2. *Se consideră o placă dreptunghiulară având laturile OA =2a, OC=4a (fig. 2.1.2.) asupra căreia acționează un cuplu în O şi 4 forțe coplanare respectiv în A_1, A_2, A_3, A_4 înclinate cu:* $\alpha_1=0;\ \alpha_2=\pi/4;\ \alpha_3=-\pi/4;\ \alpha_4=\pi$ *şi având modulele date:* $|\overline{M}|=4aF\ |\overline{F}|_1=F;\ |\overline{F}_2|=2\sqrt{2}F;\ |\overline{F}_3|=3\sqrt{2}F;$

$|\overline{F}_4|=4F$. ***Se cere :***

1) Torsorul de reducere în punctul O.

2) Ecuația axei centrale prin tăieturi (x_P, y_Q)

3) Cu ce este echivalent sistemul?



(a)

Fig. 2.1.2

Rezolvare

1. Expresiile analitice ale forțelor, cuplului $\overline{M}_1$ şi momentelor față de O sunt:

$$\overline{F}_p=X_P\bar{i}+Y_p\bar{j};$$
$$\overline{F}_p=(F_p\cos\alpha_p)\bar{i}+(F_p\sin\alpha_p)\bar{j}$$
$$\overline{M}_1=M_1\bar{k};$$
$$\overline{M}_O(\overline{F}_p)=\left(x_pY_p-y_pX_P\right)\bar{k}$$

Introducând valorile rezultă:

$$\overline{F}_1=F\bar{i};\ \overline{F}_2=2F\bar{i}+2F\bar{j};\ \overline{F}_3=3F\bar{i}-3F\bar{j};\ \overline{F}_4=-4F\bar{i}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F}_1)=0;\ \overline{M}_O(\overline{F}_2)=0;\ \overline{M}_O(\overline{F}_3)=-15aF\bar{k};\ \overline{M}_O(\overline{F}_4)=8aF\bar{k};\ \overline{M}_1=4aF\bar{k} \qquad \text{(b)}$$

Rezultanta sistemului este prin urmare:

$$\overline{R}=\sum_{p=1}^{4}\overline{F}_p \quad \Rightarrow \quad X=\sum_{p=1}^{4}F_p\cos\alpha_p=2F \qquad Y=\sum_{p=1}^{4}F_p\sin\alpha_p=-F \tag{c}$$

Momentul rezultant față de O este:

$$\overline{M}_O=\sum_{p=1}^{4}\overline{M}_O(\overline{F}_p)+\overline{M}_1=-3aF\overline{k} \tag{d}$$

2. Ecuația axei centrale pentru sistemul de forțe dat este:

$$N-xY+yX=0: \qquad x+2y=3a \tag{e}$$

Axa centrală este definită prin tăieturile *(fig S2.2.2.a)*:

$P(N/Y,0)$ $x_P=3a;$ $y_P=0$ si $Q(0,-N/X)$ $x_Q=0;$ $y_Q=3a/2;$ (f)

3. Sistemul de forțe este echivalent cu torsorul de reducere în punctul O: $\tau(\overline{R},\overline{M}_O)$ sau cu o rezultantă unică $\overline{R}$ situată pe axa centrală (întrucât în cazul unui sistem coplanar de forțe: $\overline{R}\perp\overline{M}_0=0,$ *sau* $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$).

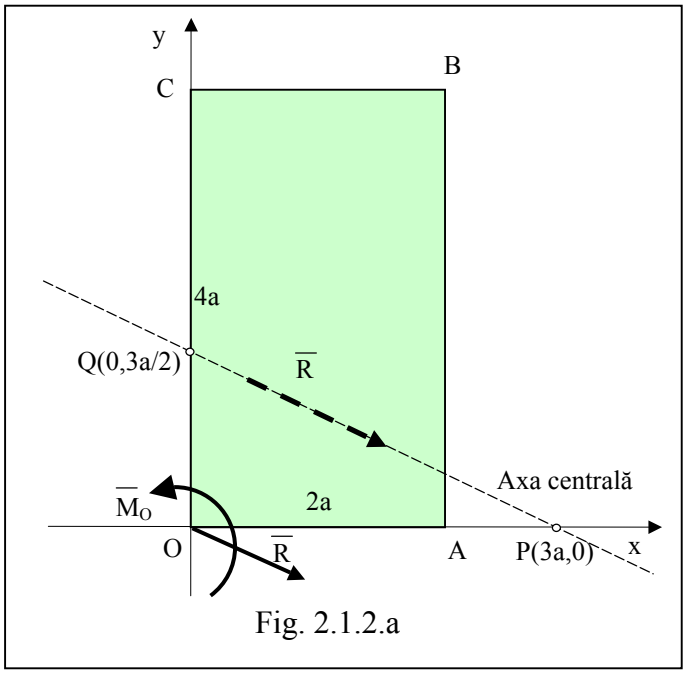


Fig. 2.1.2.a

PROBLEME PROPUSE

Se consideră placa plană având forma şi dimensiunile din figură (fig. 2.1.3 ...2.1.6.) asupra căreia acționează un cuplu şi 4 forțe coplanare respectiv în A_1, A_2, A_3, A_4 înclinate având modulele şi direcțiile date.

Se cere :

1) Torsorul de reducere în punctul O;

3) Ecuația axei centrale şi trasarea ei prin tăieturi ;

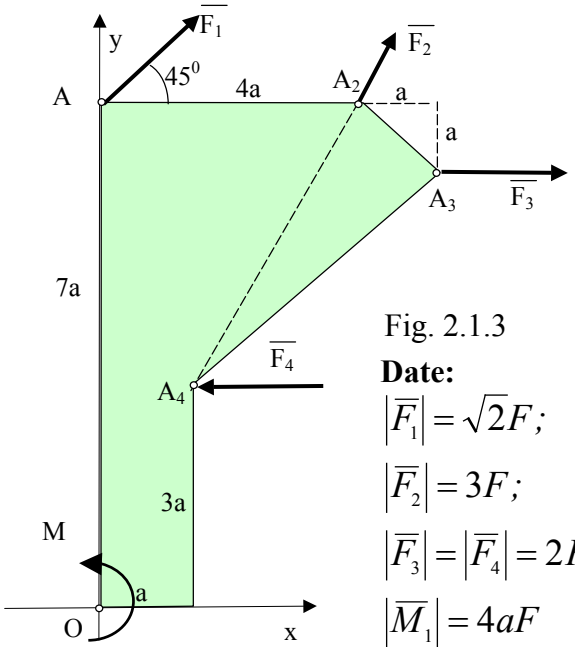


Fig. 2.1.3

Date:

$|\overline{F}_1| = \sqrt{2}F;$

$|\overline{F}_2| = 3F;$

$|\overline{F}_3| = |\overline{F}_4| = 2F;$

$|\overline{M}_1| = 4aF$

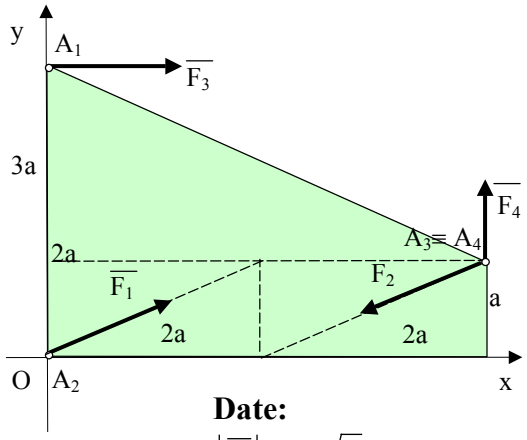


Fig. 2.1.4

Date:

$|\overline{F}_1| = 2\sqrt{5}F;$

$|\overline{F}_2| = \sqrt{5}F$

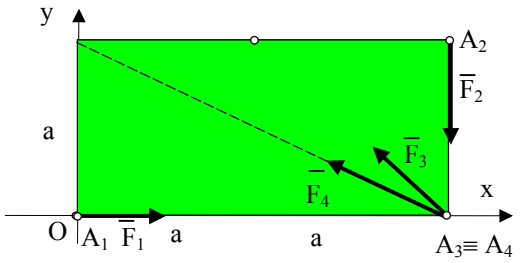
$|\overline{F}_3| = F;\ |\overline{F}_4| = 2F$

Fig. 2.1.5

Date:

$|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2| = F;\ |\overline{F}_3| = 2\sqrt{2}F;$

$|\overline{F}_5| = \sqrt{5}F;$



Date:

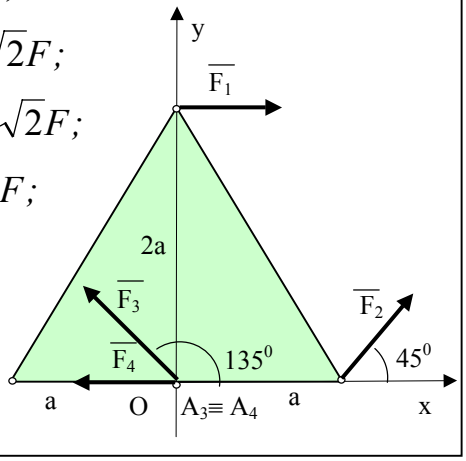
$|\overline{F}_1| = F;$

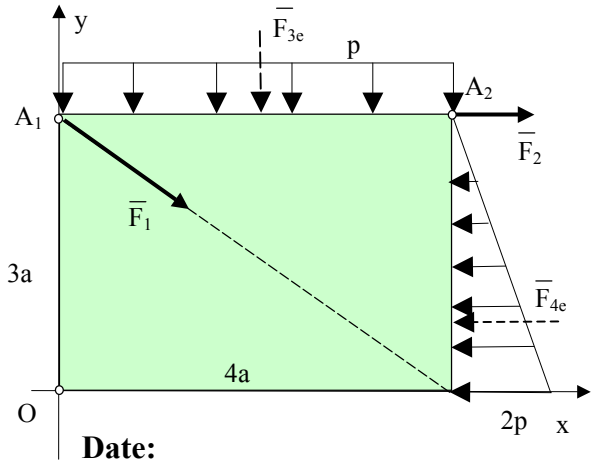
$|\overline{F}_2| = \sqrt{2}F;$

$|\overline{F}_3| = 2\sqrt{2}F;$

$|\overline{F}_4| = 3F;$

Fig. 2.1.6





Date:

$|\overline{F}_1| = 5ap;$

$|\overline{F}_2| = 2ap;$

Fig. 2.1.7

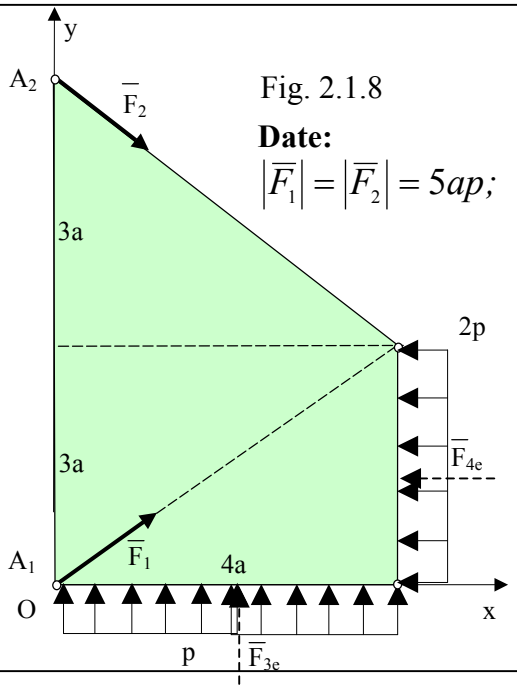


Fig. 2.1.8

Date:

$|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2| = 5ap;$

REZULTATELE PROBLEMELOR PROPUSE

Nr. probl.	Torsorul în O τ_O	Ecuația axei centrale	Punctele de inters. Ox şi Oy
0	1	3	4
2.1.3	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=-2,8F\bar{i}+3,4F\bar{j}\\ \overline{M}_O=-12aF\bar{k}\end{cases}$	*3,4x-2,8y=-12a*	*P(-3.53a,0)* *Q(0,4,29a)*
2.1.4	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=3F\bar{i}+3F\bar{j}\\ \overline{M}_O=2aF\bar{k}\end{cases}$	*3x-3y=2a*	*P(2a/3,0)* *Q(0,-2a/3)*
2.1.5	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=-3F\bar{i}+2F\bar{j}\\ \overline{M}_O=4aF\bar{k}\end{cases}$	*2x+3y=4a*	*P(2a,0)* *Q(0,4a/3)*
2.1.6	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=-3F\bar{i}+3F\bar{j}\\ \overline{M}_O=-aF\bar{k}\end{cases}$	*3x+3y=-a*	*P(a/3,0)* *Q(0,a/3)*
2.1.7	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=3ap\bar{i}-ap\bar{j}\\ \overline{M}_O=-a^2p\bar{k}\end{cases}$	*x+3y=23a*	*P(23a,0)* *Q(0,23a/3)*
2.1.8	$\tau_O:\begin{cases}\overline{R}=5ap\bar{i}+4ap\bar{j}\\ \overline{M}_O=-11,5a^2p\bar{k}\end{cases}$	*4x-5y=-11,5a*	*P(-2,875a,0)* *Q(0,2,3a)*

ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ŞI REZULTATELE OBȚINUTE

Algoritmul de calcul în EXCEL pentru datele concrete ale problemei 2.1.2.

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	**x_1/a**	**y_1/a**	**F_1/F**	**$\cos\alpha_1$**	**$\sin\alpha_1$**	**x_2/a**	**y_2/a**	**F_2/F**	**$\cos\alpha_2$**	**$\sin\alpha_2$**	**x_3/a**	**y_3/a**	**F_3/F**
1	1	0	1	1	0	2	2	2.8284	0.7071	0.7071	1	4	4.2426

DATE DE IEŞIRE

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
$\cos\alpha_3$	**$\sin\alpha_3$**	**x_4/a**	**y_4/a**	**F_4/F**	**$\cos\alpha_4$**	**$\sin\alpha_4$**	**M_4/aF**	**$X/F=\Sigma F_i\cos\alpha_i/F$**	**$Y/F=\Sigma F_i\sin\alpha_i/F$**
								C*D+H*I+ M*N+R*S	C*E+H*J+ M*O+R*T
0.7071	-0.7071	0	2	4	-1	0	4	2	-1

X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
$\Sigma x_iF_i\sin\alpha_i/aF$	**$\Sigma y_iF_i\cos\alpha_i/aF$**	**$M_{oz}/aF=M_1+(\Sigma x_iF_i\sin\alpha_i-\Sigma y_iF_i\cos\alpha_i)/aF$**	**x_P/a**	**y_Q/a**	**x_J/a**	**y_J/a**	**$M_{Jz}/aF=(-x_J*Y+y_J*X)/aF+M_{oz}/aF$**
A*C*E+F*H*J+ K*M*O+P*R*T	B*C*D+G*H*I+ L*M*N+Q*R*S	X - Y + U	Z / W	-Z / V			-AC*W+AD*V+Z

1	8	-3	3	1.5	0	5	7

2.2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE PARALELE
PROBLEME REZOLVATE

2.2.1 ***Se consideră*** *un cub de latură a asupra căriua se apică un sistem de cinci forțe paralele verticale* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$ *respectiv în punctele:* A_1 *(a,0,0);* A_2 *(0,a,0);* $A_3(a/2, a, a)$; $A_4(a/2, a/2, 0)$; $A_5(a/2, 0, a/2)$ *(vezi fig. 2.2.1.a). Forțele au acelaşi modul:* $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2| = |\overline{F}_3| = |\overline{F}_4| = |\overline{F}_5| = 2F$. ***Se cere :***

1) Torsorului de reducere în O;

2) Ecuația axei centrale;

3) Poziția centrului forțelor paralele.

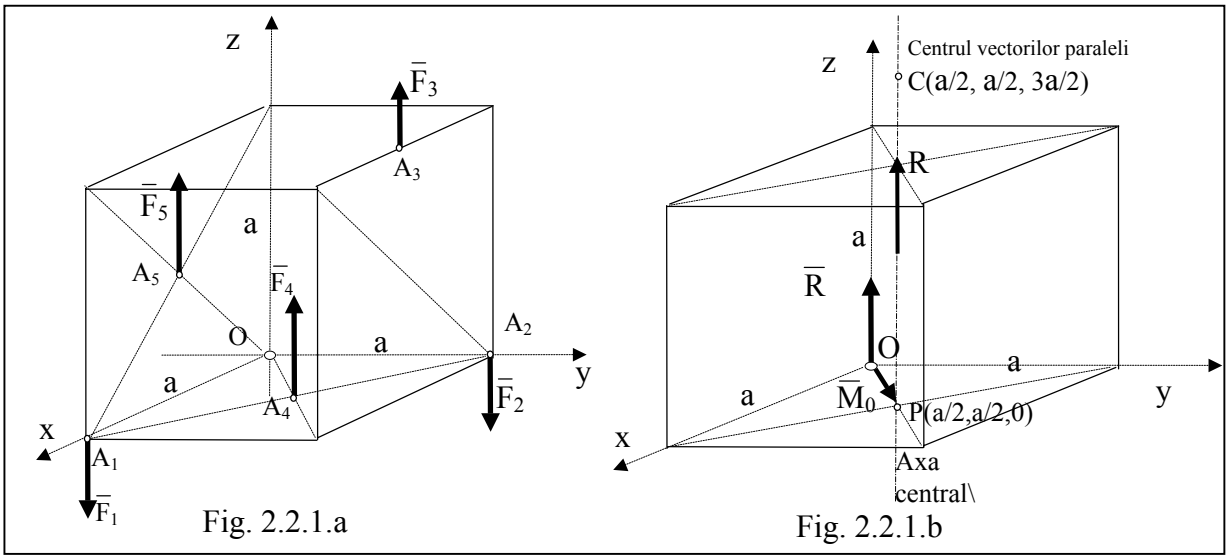


Fig. 2.2.1.a Fig. 2.2.1.b

Rezolvare:

1) Expresiile analitice ale vectorilor şi ale rezultantei acestora, sunt:

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = -2F\overline{k}, \overline{F}_3 = \overline{F}_4 = \overline{F}_5 = 2F\overline{k}$$
$$\Rightarrow \overline{R} = 2F\overline{k} \Rightarrow X = Y = 0;\ Z = 2F \qquad (a)$$

Expresia analitică a momentului rezultant este:

$$\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{5} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = \overline{OA}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{OA}_2 \times \overline{F}_2 + \overline{OA}_3 \times \overline{F}_3 + \overline{OA}_4 \times \overline{F}_4 + \overline{OA}_5 \times \overline{F}_5$$
$$\Rightarrow \overline{M}_0 = aF\overline{i} - aF\overline{j} \Rightarrow L = aF;\quad M = aF;\quad N = 0. \qquad (b)$$

2) Ecuația generală axei centrale se scrie:

$$\frac{2Fa - 4Fy}{0} = \frac{-2Fa + 4Fx}{0} = \frac{0}{2F} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{a}{2} \\ z \in R \end{cases} \qquad (c)$$

Întrucât pentru toate sistemele de forțe paralele avem îndeplinită condiția:

$\overline{R} \perp \overline{M}_0 = 0$, *sau* $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$ sistemul se reduce la o rezultantă $\overline{R}$ situată pe axa centrală care este paralelă cu forțele (cu axa Oz). (fig. 2.3.1.b).

Centrul vectorilor forță paraleli *C (ξ, η, ζ)* se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i x_i}{\sum_{i}^{5} F_i},\ \eta = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i y_i}{\sum_{i}^{5} F_i},\ \zeta = \frac{\sum_{i}^{5} F_i z_i}{\sum_{i}^{5} F_i} \qquad \text{(d)}$$

Înlocuind valorile corespunzătoare, centrul vectorilor paraleli C are coordonatele : $\xi = \frac{a}{2},\ \eta = \frac{a}{2},\quad \zeta = \frac{3a}{2} \Rightarrow \quad C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ (e)

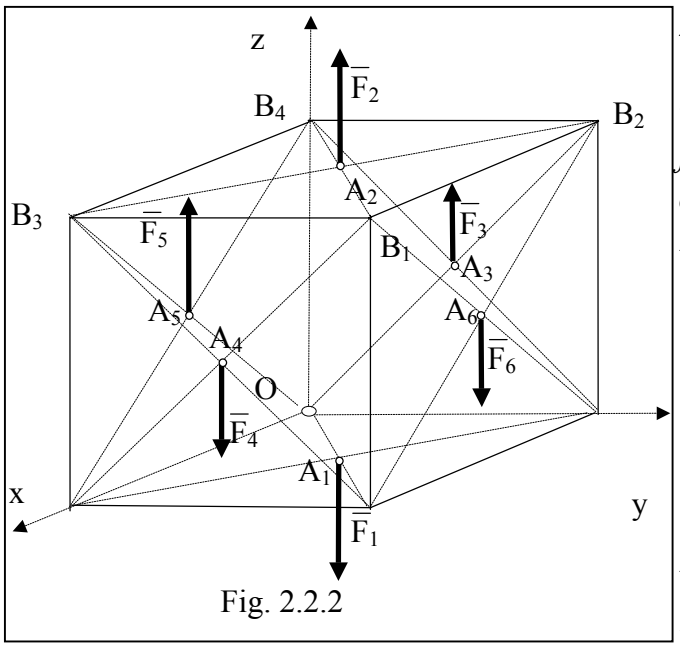


Fig. 2.2.2

2.2.2. Se consideră *un cub de latură 2a asupra căriua se apică un sistem de 6 forțe în centrele fețelor cubului de latură 2a având direcția lui OB_i , i=1,2,3,4 (fig. 2.2.2) de module:*

$$\left|\overline{F}\right|_1 = F;\ \left|\overline{F}_2\right| = 2F;\ \left|\overline{F}_3\right| = 3F;$$
$$\left|\overline{F}_4\right| = 4F;\ \left|\overline{F}\right|_5 = 5F;\ \left|\overline{F}\right|_6 = 6F$$

Se cere :

1) Torsorului de reducere în O;

2) Ecuația axei centrale;

3) Centrul forțelor paralele

Rezolvare:

1) Expresiile analitice ale vectorilor paraleli şi ale rezultantei acestora, sunt:

$$\overline{F}_i = F_i \cos\alpha_i \cdot vers\overline{OB}_i \Rightarrow \qquad \overline{R} = (\Sigma F_i \cos\alpha_i) \cdot vers\overline{OB}_i \qquad \text{(a)}$$

unde versorul direcției $\overline{OB}_i$ se scrie: $vers\overline{OB}_i = \frac{\overline{OB}_i}{\left|\overline{OB}_i\right|} = \frac{x_{Bi}\bar{i} + y_{Bi}\bar{j} + z_{Bi}\bar{k}}{\sqrt{(x_{Bi})^2 + (y_{Bi})^2 + (z_{Bi})^2}}$

Expresia analitică a momentului rezultant este:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{5} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = \sum F_i(\overline{OA}_i \times vers\overline{OB}_i)$$

2) Ecuația axei centrale: $\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$

3) Centrul vectorilor forță paralele *C (ξ, η, ζ)* se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i x_i}{\sum_{i}^{5} F_i},\ \eta = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i y_i}{\sum_{i}^{5} F_i},\ \zeta = \frac{\sum_{i}^{5} F_i z_i}{\sum_{i}^{5} F_i} \qquad \text{(b)}$$

ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ŞI REZULTATELE OBȚINUTE

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nr.	x_1/a	y_1/a	z_1/a	F_1/F	$\cos\alpha_1$	x_2/a	y_2/a	z_2/a	F_2/F	$\cos\alpha_2$
1	1	1	0	1	-1	1	1	2	2	1

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
x_3/a	y_3/a	z_3/a	F_3/F	$\cos\alpha_3$	x_4/a	y_4/a	z_4/a	F_4/F	$\cos\alpha_4$	x_5/a
0	1	1	3	1	2	1	1	4	-1	1

V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
y_5/a	z_5/a	F_5/F	$\cos\alpha_5$	x_6/a	y_6/a	z_6/a	F_6/F	$\cos\alpha_6$	x_B/a	y_B/a	z_B/a
0	1	5	1	1	2	1	6	-1	2	2	2

DATE DE IEŞIRE

AH	AI	AJ	AK	AL
$\Sigma F_i x_i \cos\alpha_i / aF$	$\Sigma F_i y_i \cos\alpha_i / aF$	$\Sigma F_i z_i \cos\alpha_i / aF$	$\Delta_x = versOB_x$	$\Delta_y = versOB_y$
A*D*E+F*I*J+K*N*O+P*S*T+U*X*Y+Z*AC*AD	B*D*E+G*I*J+L*N*O+Q*S*T+V*X*Y+AA*AC*AD	C*D*E+H*I*J+M*N*O+R*S*T+W*X*Y+AB*AC*AD	AE/SQRT(AE^ 2+AF^2+AG^2)	AF/SQRT(AE^ 2+ AF^2+AG^2)
-8	-12	2		0,57735

AM	AN	AO	AP	AQ	AR
$\Delta_z = versOB_z$	$R/F = \Sigma F_i \cos\alpha_i / F$	$X/F = \Delta_x.R/F$	$Y/F = \Delta_y.R/F$	$Z/F = \Delta_z.R/F$	$M_{Ox}/aF = \Delta_Z \Sigma F_i y_i \cos\alpha_i/aF - \Delta_y \Sigma F_i z_i \cos\alpha_i/aF$
AG/SQRT(AE^2+AF^2+AG^2)	D*E+I*J+N*O+S*T+X*Y+AC*AD	AN*AK	AN*AL	AN*AM	AM*AI - AL*AJ
0,57735	-1	-0,57735	-0,57735	-0,57735	-8,0829

AT	AU	AV	AW	AX	AY
$M_{Oy}/aF = \Delta_x \Sigma F_i z_i \cos\alpha_i/aF - \Delta_z \Sigma F_i x_i \cos\alpha_i/aF$	$M_{Oz}/aF = \Delta_y \Sigma F_i x_i \cos\alpha_i/aF - \Delta_x \Sigma F_i y_i \cos\alpha_i/aF$	$R.M_O/a^2F = (X.M_{Ox} + Y.M_{Oy} + Z.M_{Oz})/a^2F = 0$ (verificare)	ξ/a	η/a	ζ/a
AK*AJ - AM*AH	AL*AH - AK*AI	AO*AR+AP*AT+AQ*AU	AH/AN	AI/AN	AJ/AN
5,7735	2,3094	0	8	12	-2

S-au obținut deci următoarele rezultate pentru problema 2.2.2:

1) Torsorul de reducere în O:

$$\tau_0 :\ \begin{cases} \overline{R} = -0{,}577F\bar{i} - 0{,}577F\bar{j} \\ \overline{M}_0 = -8{,}083aF\bar{i} + 5{,}773aF\bar{j} + 2{,}309aF\bar{k} \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

2) Ecuația axei centrale:

$$\frac{-8{,}083aF - 0{,}577Fy + 0{,}577Fz}{0{,}577F} = \frac{5{,}773aF - 0{,}577Fz + 0{,}577Fx}{0{,}577F} = \frac{2{,}309aF - 0{,}577Fx + 0{,}577Fy}{0{,}577F} \qquad \text{(d)}$$

Întrucât pentru toate sistemele de forțe paralele avem:

$\overline{R} \perp \overline{M}_0 = 0$, *sau* $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$ sistemul se reduce la o rezultantă $\overline{R}$ situată pe axa centrală care este paralelă cu forțele (cu axa Oz).

3) Centrul forțelor paralele are coordonatele:

$$\xi = 8a,\ \eta = 12a,\ \zeta = -2a \Rightarrow \quad C(8a,12a,-2a) \qquad \text{(e)}$$

PROBLEMĂ PROPUSĂ

2.2.3 ***Se consideră*** *sistem de forțe paralele verticale* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ *care se aplică respectiv în punctele:* A_1 *(3a,a,0);* A_2 *(a,2a,0);* A_3 *(2a,-a,0);* A_2 *(-2a,5a,0); (fig. 2.2.1.a). Forțele au modulele:* $|\overline{F}_1| = 5F;\ |\overline{F}_2| = 3F;\ |\overline{F}_3| = 9F;\ |\overline{F}_4| = F$. ***Se cer:***

1)Torsorului de reducere în O;

2)Ecuația axei centrale şi poziția centrului forțelor paralele.

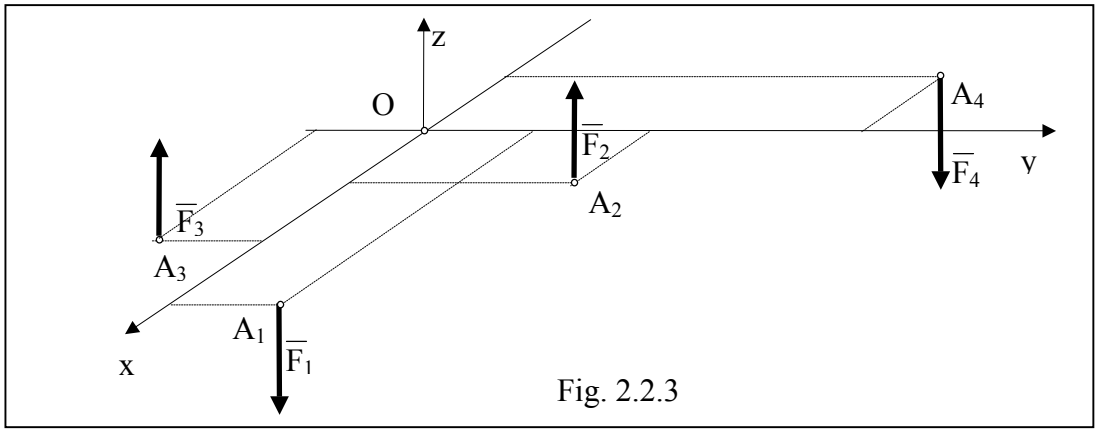


Fig. 2.2.3

Rezultate:

1)Torsorul de reducere în O: $\tau_0 :\ \begin{cases} \overline{R} = 6F\bar{k} \\ \overline{M}_0 = -13aF\bar{i} + 8aF\bar{j} \end{cases}$

2)Ecuația axei centrale şi centrul vectorilor paraleli: $x = \frac{4}{3}a;\ y = -\frac{13}{6}a;\ C\left(\frac{4}{3}a;-\frac{13}{6}a;0\right)$

2.3. REDUCEREA SISTEMELOR SPAȚIALE DE FORȚE ŞI CUPLURI.

PROBLEME REZOLVATE

2.3.1 ***Se consideră*** *un cub rigid de latură a, asupra căruia acționează forțele:* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ *ca în figura 2.3.1.a. Mărimile acestor forțe sunt cunoscute:*

$|\overline{F}_1| = \sqrt{3}F, |\overline{F}_2| = |\overline{F}_3| = F, |\overline{F}_4| = 2F$. ***Se cer:***

1) Torsorul de reducere în punctul O; 2) Torsorul de reducere în punctul B';

3) Ecuația axei centrale; 4) Cu ce este echivalent sistemul?

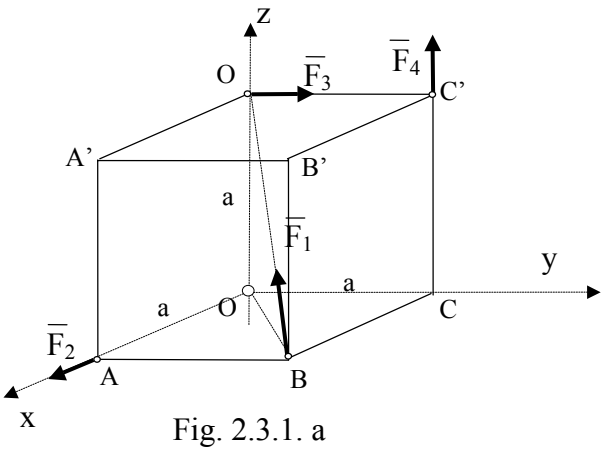


Fig. 2.3.1. a

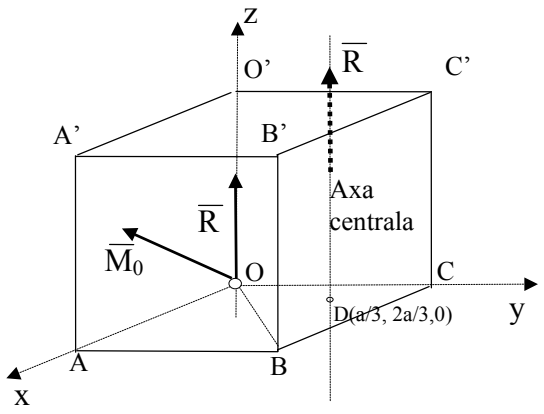


Fig. 2.3.1.b

Rezolvare:

1) Expresiile analitice ale vectorilor forță se scriu astfel:

$$\overline{F}_1 = |\overline{F}_1| vers\overline{F}_1 = |\overline{F}_1| \frac{\overline{BO'}}{|\overline{BO'}|} = \sqrt{3}F \frac{-a\bar{i} - a\bar{j} + a\bar{k}}{a\sqrt{3}} = F(-\bar{i} - \bar{j} + \bar{k})$$

$$\overline{F}_2 = |\overline{F}_2| vers\overline{F}_2 = F\bar{i}; \quad \overline{F}_3 = |\overline{F}_3| vers\overline{F}_3 = F\bar{j}; \quad \overline{F}_4 = |\overline{F}_4| vers\overline{F}_4 = 2F\bar{k}$$

$$\Rightarrow \overline{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F}_i = 3F\bar{k} \qquad \Rightarrow X = Y = 0, \quad Z = 3F \tag{a}$$

şi expresiile analitice ale vectorilor moment:

$$\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{4} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = \overline{OB} \times \overline{F}_1 + \overline{OA} \times \overline{F}_2 + \overline{OO'} \times \overline{F}_3 + \overline{OC'} \times \overline{F}_4 =$$

$$= (a\bar{i} + a\bar{j}) \times F\bar{i} + a\bar{k} \times F\bar{j} + (a\bar{j} + a\bar{k}) \times 2F\bar{k} \tag{b}$$

$$\overline{M}_0 = Fa(2\bar{i} - \bar{j}) \quad \Rightarrow L = 2aF, \; M = -aF, \; N = 0$$

2) Momentul rezultant în punctul B' se calculează cu ajutorul relației:

$$\overline{M}_{B'} = \overline{M}_O + \overline{B'O} \times \overline{R} = 2aF\bar{i} - aF\bar{j} + (-a\bar{i} - a\bar{j} - a\bar{k}) \times 3F\bar{k} = aF(-\bar{i} + 2\bar{j}) \quad \text{(c)}$$

Ecuația axei centrale se scrie:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{2aF - 3Fy}{0} = \frac{-aF + 3Fx}{0} = \frac{0}{3F} \Rightarrow x = \frac{a}{3}, y = \frac{2a}{3}, z \in R \quad \text{(d)}$$

şi este o dreaptă perpendiculară pe planul Oxy (paralelă cu axa *Oz)* care intersectează *Oxy* în punctul *D(a/3, 2a/3, 0).*

4) Întrucât $\overline{M}_o \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow \overline{M}_o \perp \overline{R}$ *sau* $M_R = 0$, sistemul se reduce la un vector unic $\overline{R}$ situat pe axa centrală. Prin urmare sistemul de forțe $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4)$ aplicate în A_1, A_2, A_3, A_4 este echivalent cu:

a. un torsor $(\overline{R}, \overline{M}_o)$ aplicat în O;

b. o rezultantă unică $\overline{R}$ aplicat într-un punct oarecare de pe axa centrală.

2.3.2. *Se consideră paralelipipedul dreptunghic rigid cu laturile: OA=3a , OC=4a , OO'=12a asupra căruia acționează forțele* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ *după direcțiile diagonalelor AB' CB' CO' respectiv AO' (fig.2.3.2.a.). Forțele au mărimile:* $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_3| = 4F\sqrt{12}, \quad |\overline{F}_2| = |\overline{F}_4| = 3F\sqrt{17}$

Se cere: *1) Torsorul de reducere în O;*

2) Ecuația axei centrale;

3) La ce se reduce sistemul?

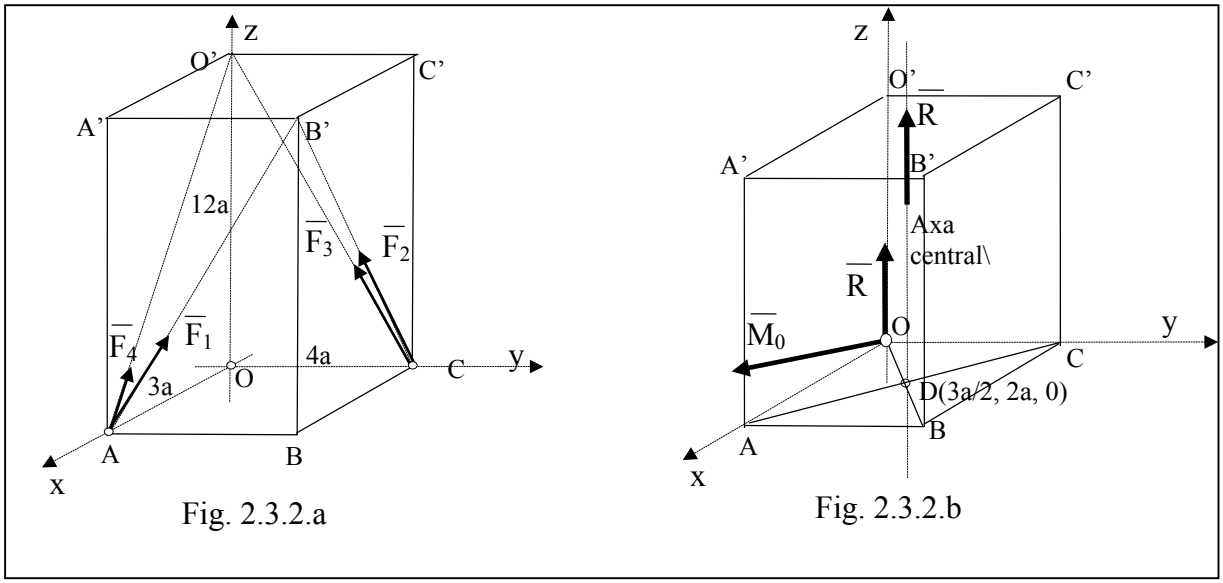


Fig. 2.3.2.a

Fig. 2.3.2.b

Rezolvare:

1) Expresiile analitice ale celor patru forțe sunt:

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| vers\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \frac{\overline{AB'}}{|\overline{AB'}|} = 4F\sqrt{10}\,\frac{4a\bar{j}+12a\bar{k}}{4a\sqrt{10}} = 4F(\bar{i}+3\bar{k}) \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| vers\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \frac{\overline{CB'}}{|\overline{CB'}|} = 3F\sqrt{17}\,\frac{3a\bar{i}+12a\bar{k}}{3a\sqrt{17}} = 3F(\bar{i}+4\bar{k})$$

$$\bar{F}_3 = |\bar{F}_3| vers\bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \frac{\overline{CO'}}{|\overline{CO'}|} = 4F\sqrt{10}\,\frac{-4a\bar{j}+12a\bar{k}}{4a\sqrt{10}} = 4F(-\bar{j}+3\bar{k}) \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{F}_4 = |\bar{F}_4| vers\bar{F}_4 = |\bar{F}_4| \frac{\overline{AO'}}{|\overline{AO'}|} = 3F\sqrt{17}\,\frac{-3a\bar{i}+12a\bar{k}}{3a\sqrt{17}} = 3F(-\bar{i}+4\bar{k})$$

Expresiile rezultantei şi al momentului rezultant în punctul O vor fi:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i = 48F\bar{k} \quad \Rightarrow X = Y = 0, \qquad Z = 48F \qquad \text{(b)}$$

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{4} M_0(\bar{F}_i) = \overline{OA}\times\bar{F}_1 + \overline{OC}\times\bar{F}_2 + \overline{OC}\times\bar{F}_3 + \overline{OA}\times\bar{F}_4$$

$$\bar{M}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 4F & 0 & 12F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4a & 0 \\ 3F & 0 & 4F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4a & 0 \\ 0 & -4F & 12F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ -3F & 0 & 12F \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{M}_0 = 96aF\bar{i} - 72aF\bar{j}$$

$$\Rightarrow L = 96aF, \quad M = 72aF, \quad N = 0 \qquad (c)$$

2) Ecuația axei centrale se scrie:

$$\frac{96aF - 48Fy}{0} = \frac{-72aF + 48Fx}{0} = \frac{0}{48F} \qquad \text{(d)}$$

$\Rightarrow x = \frac{3a}{2}, y = 2a, z = arbitrar$, deci axa centrală este paralelă cu Oz fiind chiar axa de simetrie a paralelipipedului, (vezi fig. 2.3.2.b).

Ecuația axei centrale sub formă vectorială se scrie: $\bar{\rho} = \frac{\bar{R}\times\overline{M_o}}{|\bar{R}|^2} + \lambda\bar{R};$ sau

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \frac{1}{17F^2}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2F & 3F & 2F \\ 2aF & -14aF & 13aF \end{vmatrix} + \lambda F(-2\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k})\lambda$$

Deci ecuațiile parametrice ale axei centrale se scriu:

$$x=\frac{67}{17}a-2F\lambda;\quad y=\frac{30}{17}a+3F\lambda;\quad z=\frac{22}{17}a+2F\lambda \qquad \text{(e)}$$

3) Întrucât $\overline{M}_o\cdot\overline{R}=0\Rightarrow\overline{M}_o\perp\overline{R}$,sistemul se reduce la o rezultantă unică $\overline{R}$ situată pe axa centrală, (vezi fig. 2.1.2.b).

2.3.3. ***Se consideră*** *sistemele formate din trei forţe* $\overline{F}_1,\overline{F}_2,\overline{F}_3$ *şi trei cupluri* $\overline{M}_x,\overline{M}_y,\overline{M}_z$ *ce acţionează asupra unui paralelipiped având forma şi dimensiunile precizate în fig. 2.3.3; orientarea forţelor* $\overline{F}_1,\overline{F}_2,\overline{F}_3$ *este dată de vectorii* $\overline{AB},\ \overline{CD},\ \overline{EF}$*, iar orientarea celor trei cupluri este după cele trei axe de coordonate (Ox, Oy, Oz). Se dau modulele acestor forţe şi cupluri:*

$$\left|\overline{F}_1\right|=\sqrt{22}F;\ \left|\overline{F}_2\right|=5F;\ \left|\overline{F}_3\right|=2F;\quad \left|\overline{M}_x\right|=\left|\overline{M}_y\right|=0;\ \left|\overline{M}_z\right|=2aF;$$

Să se determine:

1. *Torsorul de reducere al sistemului, în punctul O;*
2. *Torsorul minimal;*
3. *Ecuaţia axei centrale;*

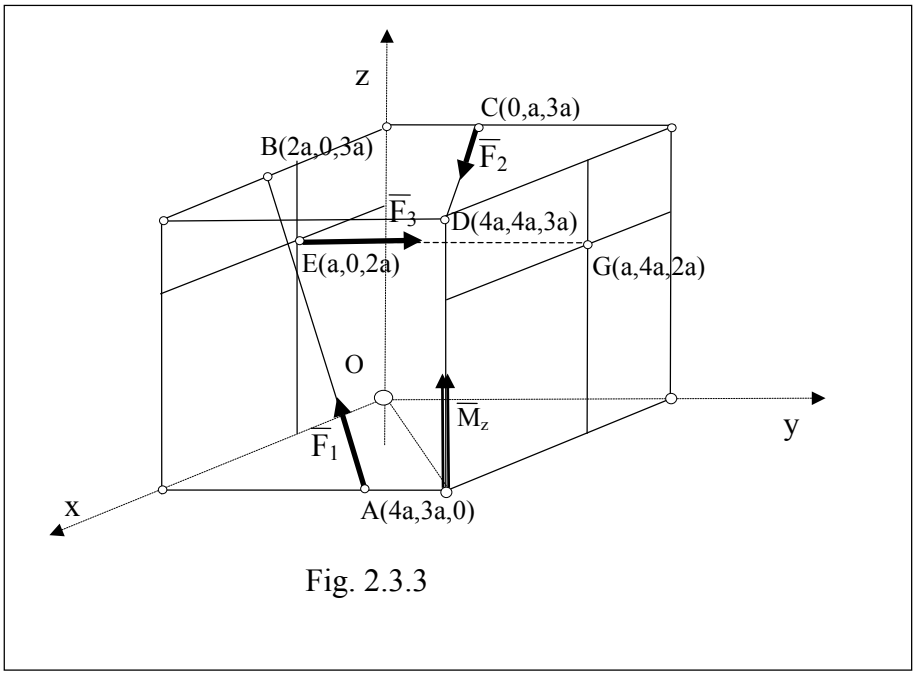


Fig. 2.3.3

Pentru creerea algoritmului de calcul în EXCEL pentru problema 2.3.3. s-au utilizat următoarele relaţii:

- Expresiile analitice ale celor patru vectori:

$$\overline{F_1} = \left|\overline{F_1}\right| \cdot vers\,\overline{AB} = \left|\overline{F_1}\right| \cdot \frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} = \left|\overline{F_1}\right| \cdot \frac{(x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}; \quad \text{(a)}$$

$$\overline{F_2} = \left|\overline{F_2}\right| \cdot vers\overline{CD}; \qquad \overline{F_3} = \left|\overline{F_3}\right| \cdot vers\overline{EF}; \qquad \overline{M_1} = \left|\overline{M_1}\right| \cdot vers\overline{M_1}$$

- Expresiile analitice ale momentelor celor 3 forțe în raport cu O:

$$\overline{M_O}(\overline{F_1}) = \overline{OA} \times \overline{F_1} = (y_A Z_1 - z_A Y_1)\bar{i} + (z_A X_1 - x_A Z_1)\bar{i} + (x_A Y_1 - y_A X_1)\bar{i}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_2}) = \overline{OC} \times \overline{F_2} = (y_C Z_2 - z_C Y_2)\bar{i} + (z_C X_2 - x_C Z_2)\bar{i} + (x_C Y_2 - y_C X_2)\bar{i} \quad \text{(b)}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_3}) = \overline{OE} \times \overline{F_3} = (y_E Z_3 - z_E Y_3)\bar{i} + (z_E X_3 - x_E Z_3)\bar{i} + (x_E Y_3 - y_E X_3)\bar{i}$$

- Componentele torsorului de reducere al sistemului în punctul O:

$$\overline{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \qquad \overline{M_O} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k} \quad \text{(c)}$$

- Componentele torsorului minimal:

$$\overline{M_{min}} = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_O}}{R^2} X\bar{i} + \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_O}}{R^2} Y\bar{j} + \frac{\overline{R} \cdot \overline{M_O}}{R^2} Z\bar{k} \quad \text{(d)}$$

- Componentele produsului vectorial :

$$\overline{R} \times \overline{M_O} = (YN - ZN)\bar{i} + (ZL - XN)\bar{j} + (XM - YL)\bar{k} \quad \text{(e)}$$

din ecuația vectorială a axei centrale:

$$\overline{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \left(\overline{R} \times \overline{M_O}\right)/R^2 + \lambda\overline{R} \quad \text{(f)}$$

Rezultatele calculelor conform relațiilor de mai sus sunt:

1. Torsorul de reducere în punctul O:

$$\tau_O : \begin{cases} \overline{R} = F(2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \\ \overline{M}_O = aF(-4\bar{i} - 6\bar{k}) \end{cases} \quad \text{(g)}$$

2. Torsorul minimal:

$$\tau_{min} : \begin{cases} \overline{R} = F(2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \\ \overline{M}_{min} = -3{,}0588aF\bar{i} - 3{,}0588aF\bar{j} - 4{,}5882aF\bar{k} \end{cases} \quad \text{(h)}$$

3. Ecuația axei centrale sub formă parametrică:

$$x = -\frac{12}{17}a + 2\lambda F; y = 2\lambda F; z = \frac{8}{17}a + 3\lambda F \quad \text{(i)}$$

Relațiile de mai sus se regăsesc în următorul algoritm de calcul:

ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ŞI REZULTATELE OBȚINUTE

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Nr.	x_A/a	y_A/a	z_A/a	x_B/a	y_B/a	z_B/a	x_C/a	y_C/a	z_C/a	x_D/a	y_D/a	z_D/a
1	4	3	0	2	0	3	0	1	3	1	0	2

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z

x_E/a	y_E/a	z_E/a	x_F/a	y_F/a	z_F/a	F_1/F	F_2/F	F_3/F	M_1/aF	vers M_{1x}	vers M_{1y}	vers M_{1z}
4	4	3	1	4	2	4,6904	5	2	2	0	0	1

DATE DE IEŞIRE

AA	AB	AC
$(versF1)_x$	**$(versF1)_y$**	**$(versF1)_z$**
(D1-A1)/SQRT((D1-A1)^2+ (E1-B1)^2+(F1-C1)^2)	(E1-B1)/SQRT((D1-A1)^2+ (E1-B1)^2+(F1-C1)^2)	(F1-C1)/SQRT((D1-A1)^2+ (E1-B1)^2+(F1-C1)^2)
-0,4264	-0,6396	0,6396

AE	AF	AG
$(versF2)_x$	**$(versF2)_y$**	**$(versF2)_z$**
(J1-G1)/SQRT((J1-G1)^2+ (K1-H1)^2+(L1-I1)^2)	(K1-H1)/SQRT((J1-G1)^2+ (K1-H1)^2+(L1-I1)^2)	(L1-I1)/SQRT((J1-G1)^2+ (K1-H1)^2+(L1-I1)^2)
0,8	0,6	0

AH	AI	AJ
$(versF3)_x$	**$(versF3)_y$**	**$(versF3)_z$**
(P1-M1)/SQRT((P1-M1)^2+ (Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)	(Q1-N1)/SQRT((P1-M1)^2+ (Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)	(R1-O1)/SQRT((P1-M1)^2+ (Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)
0	1	0

AK	AL	AM	AN	AO	AP
X/F	**Y/F**	**Z/F**	**R^2/F^2**	**$(M_OF1/aF)_x$**	**$(M_O F1/aF)_y$**
AA1*S1+AE1* T1+ AH1*U1	AB1*S1+AF1*T1+ AI1*U1	AC1*S1+AG1*T1 + AJ1*U1	AK^2+AL^2+ AM^2	S1(B1*AC1- C1*AB1)	S1(C1*AA1- A1*AC1)
2	2	3	17	9	-12

AQ	AR	AS	AT	AU	AV
$(M_OF1/aF)_Z$	**$(M_O F2/aF)_x$**	**$(M_OF2/aF)_y$**	**$(M_O F2/aF)_z$**	**$(M_OF3/aF)_x$**	**$(M_O F3/aF)_y$**
S1(A1*AB1- B1*AA1)	T1(H1*AG1- I1*AF1)	T1(I1*AE1- G1*AG1)	T1(G1*AF1- H1*AE1)	U1(N1*AJ1- O1*AI1)	U1(O1*AH1- M1*AJ1)
-6	-9	12	-4	-4	0

AW	AX	AY	AZ	BA
$(M_OF3/aF)_z$	**$L/aF = (M_O/aF)_x$**	**$M/aF = (M_O/aF)_y$**	**$N/aF = (M_O/aF)_z$**	**$R.M_O/aF^2$**
U1(M1*AI1- N1*AH1)	AO1+AR1+AU1+ X1*V1	AP1+AS1+AV1+Y 1*V1	AQ1+AT1+AW1+ Z1*V1	AK1*AX1+AL1*AY1+AM1*AZ 1
2	-4	0	-6	-26

BB	BC	BD	BE	BF	BG
$(M_{min}/aF)_x$	$(M_{min}/aF)_y$	$(M_{min}/aF)_z$	$(\bar{R}\times\bar{M}_O/aF^2)_x$	$(\bar{R}\times\bar{M}_O/aF^2)_y$	$(\bar{R}\times\bar{M}_O/aF^2)_z$
BA1*AK1/AN 1	BA1*AL1/AN1	BA1*AM1/AN1	AL1*AZ1- AM1*AY1	AM1*AX1- AK1*AZ1	AK1*AY1- AL1*AX1
-3,0588	-3,0588	-4,5882	-12	0	8

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *un paralelipiped rigid, asupra căruia acționează forțele:* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ *ca în figurile 2.3.4...2.3.10. Mărimile acestor forțe sunt cunoscute.*

Se cer:

1) Torsorul de reducere în punctul O; 2) Torsorul de reducere în punctul C';

3) Ecuația axei centrale sub formă parametrică;

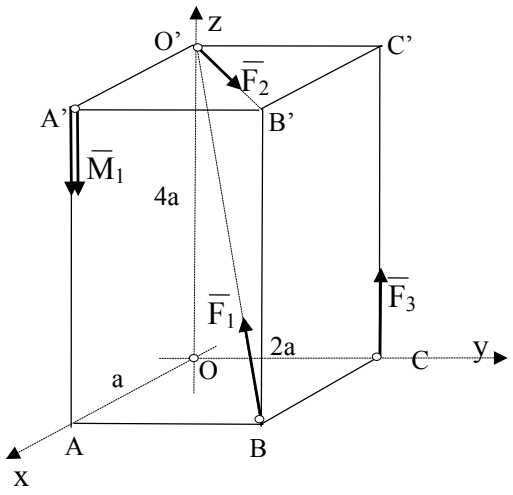


Fig. 2.3.4

Date :

$|\overline{F}_1| = 2\sqrt{21}F; |\overline{F}_2| = 2\sqrt{5}F;$

$|\overline{F}_3| = 2F; \ |\overline{M}_1| = 10aF$

Rezultate :

$\overline{R} = 10F\overline{k}; \ \overline{M}_O = -4aF\overline{j} - 10aF\overline{k};$

$\overline{M}_{c'} = 20aF\overline{i} - 4aF\overline{j} - 10aF\overline{k};$

$x = 40a; \ y = 0; \ z = 10\lambda$

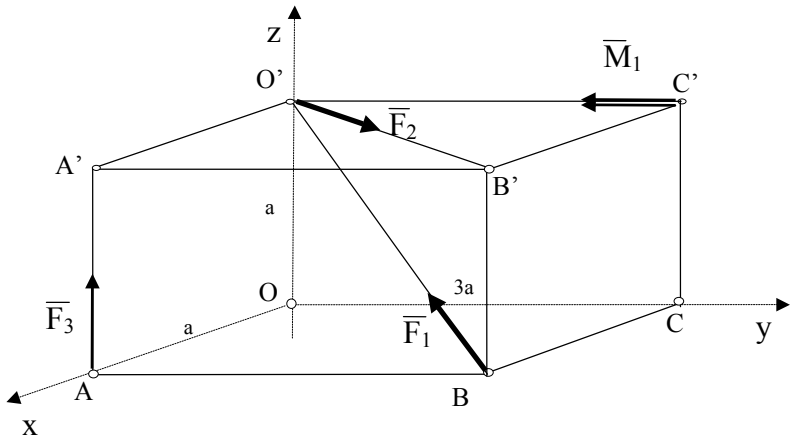


Fig. 2.3.5

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{11}F; |\overline{F}_2| = \sqrt{10}F;$

$|\overline{F}_3| = 3F; \ |\overline{M}_1| = 5aF$

Rezultate :

$\overline{R} = 4F\overline{k}; \ \overline{M}_O = -8aF\overline{j};$

$\overline{M}_{c'} = 12aF\overline{i} - 8aF\overline{j};$

$x = 32a; \ y = 0; \ z = 4\lambda$

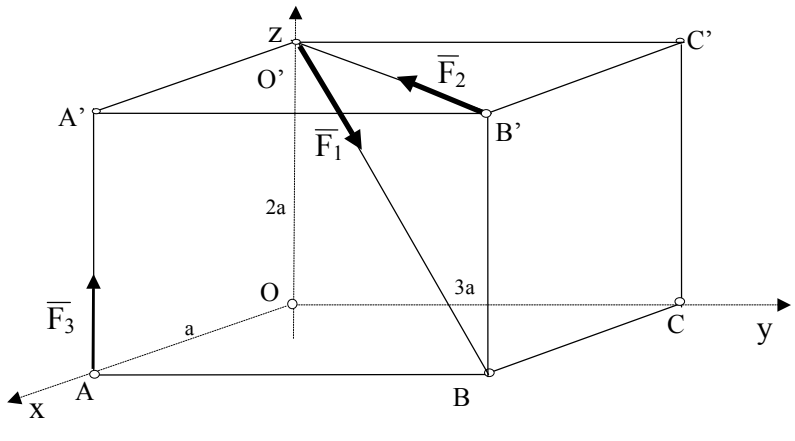


Fig. 2.3.6

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{14}F; |\overline{F}_2| = 3\sqrt{10}F;$

$|\overline{F}_3| = 2F; \ |\overline{M}_1| = 2aF$

Rezultate

$\overline{R} = -2F\overline{i} - 6F\overline{j}; \ \overline{M}_O = -8aF\overline{j};$

$\overline{M}_{c'} = -12aF\overline{i} - 4aF\overline{j} - 6aF\overline{k};$

$x = -2\lambda; \ y = 8a - 6\lambda; \ z = 72a$

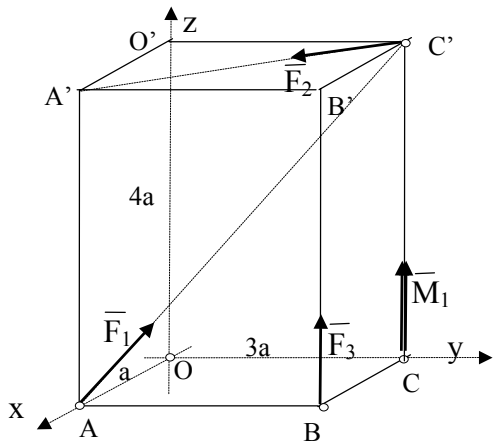


Fig. 2.3.7

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{26}F; |\overline{F}_2| = \sqrt{10}F;$

$|\overline{F}_3| = 2F; \ |\overline{M}_1| = 5aF$

Rezultate

$\overline{R} = 6F\overline{k}; \ \overline{M}_O = -8a\overline{Fj};$

$\overline{M}_{c'} = 18a\overline{Fi} - 2a\overline{Fj} + 5a\overline{Fk};$

$x = 12a; \ y = 108a; \ z = 6\lambda$

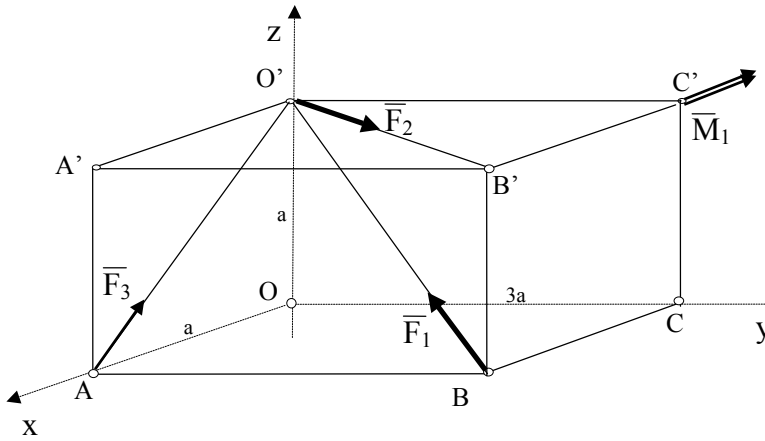


Fig. 2.3.8

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{11}F; |\overline{F}_2| = \sqrt{10}F;$

$|\overline{F}_3| = \sqrt{2}F; \ |\overline{M}_1| = 4aF$

Rezultate

$\overline{R} = -F\overline{i} + 2F\overline{k}; \ \overline{M}_O = -4aF\overline{i} - a\overline{Fj};$

$\overline{M}_{c'} = -2aF\overline{i} - 3aF\overline{k};$

$x = 2a - \lambda; \ y = -8a; \ z = a + 2\lambda$

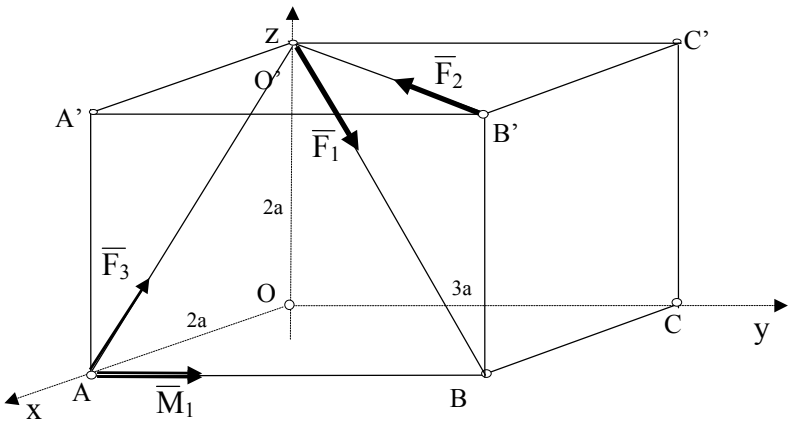


Fig. 2.3.9

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{17}F; |\overline{F}_2| = \sqrt{13}F;$

$|\overline{F}_3| = 2\sqrt{2}F; \ |\overline{M}_1| = 2aF$

Rezultate :

$\overline{R} = -2F\overline{i}; \ \overline{M}_O = -2aF\overline{j};$

$\overline{M}_{c'} = 2aF\overline{j} - 6aF\overline{k};$

$x = -2\lambda; \ y = 0; \ z = 4a$

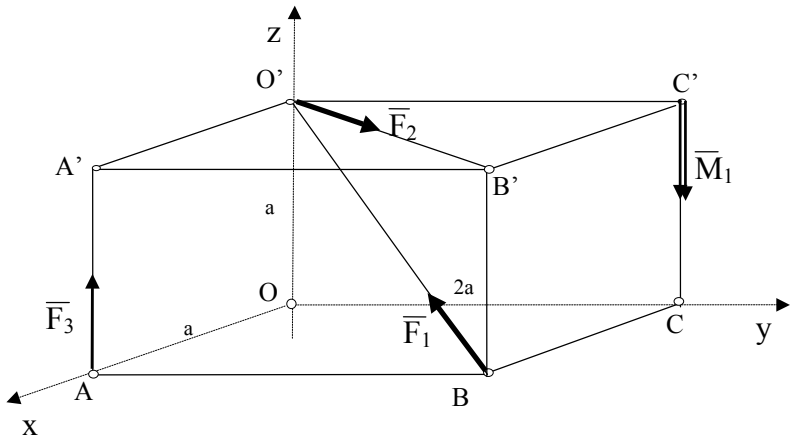


Fig. 2.3.10

Date :

$|\overline{F}_1| = \sqrt{6}F; |\overline{F}_2| = \sqrt{5}F;$

$|\overline{F}_3| = 2F; \ |\overline{M}_1| = 4aF$

Rezultate :

$\overline{R} = 3F\overline{k}; \ \overline{M}_O = -2aF\overline{j} - 4aF\overline{k};$

$\overline{M}_{c'} = 6aF\overline{i} - 2aF\overline{j} - 4aF\overline{k};$

$x = 6a; \ y = 0; \ z = 3\lambda$

CAPITOLUL III
CENTRUL MASELOR - CENTRE DE GREUTATE

REZUMAT DE TEORIE

Centrul de greutate pentru un sistem rigid continuu de puncte materiale are vectorul de poziție $\overline{\rho}$ şi coordonatele (ξ,η,ζ) , date de relațiile:

$$\overline{\rho}=\frac{\int\limits_{(D)}\overline{r}dm}{\int\limits_{(D)}dm}\quad;\qquad \xi=\frac{\int\limits_{(D)}xdm}{\int\limits_{(D)}dm},\ \eta=\frac{\int\limits_{(D)}ydm}{\int\limits_{(D)}dm},\ \zeta=\frac{\int\limits_{(D)}zdm}{\int\limits_{(D)}dm}$$

Se deosebesc următoarele cazuri particulare:

a. În cazul plăcilor omogene $(dm=\mu_S dA,\ \mu_S=constant)$, expresiile *vectorului de poziție şi coordonatele centrului de greutate* sunt date de relațiile:

$$\overline{\rho}=\frac{\int\limits_{(S)}\overline{r}dA}{\int\limits_{(S)}dA}\quad;\qquad \xi=\frac{\int\limits_{(S)}xdA}{\int\limits_{(S)}dA},\quad \eta=\frac{\int\limits_{(S)}ydA}{\int\limits_{(S)}dA},\quad \zeta=\frac{\int\limits_{(S)}zdA}{\int\limits_{(S)}dA}.$$

b. În cazul barelor omogene $(dm=\mu_l ds,\ \mu_l=constant)$ expresiile *vectorului de poziție şi coordonatele centrului de greutate* sunt date de relațiile:

$$\overline{\rho}=\frac{\int\limits_{(l)}\overline{r}ds}{\int\limits_{(l)}ds}\quad;\qquad \xi=\frac{\int\limits_{(l)}xds}{\int\limits_{(l)}ds},\ \eta=\frac{\int\limits_{(l)}yds}{\int\limits_{(l)}ds},\ \zeta=\frac{\int\limits_{(l)}zds}{\int\limits_{[l]}ds}$$

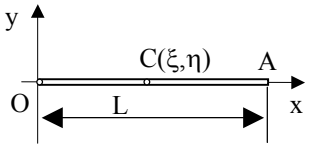
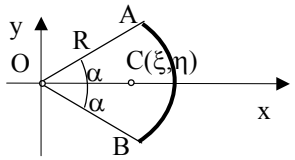
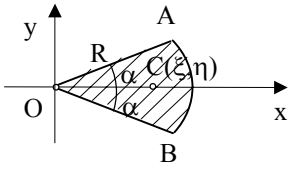
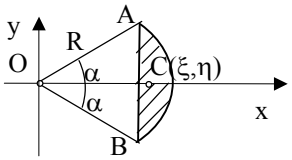
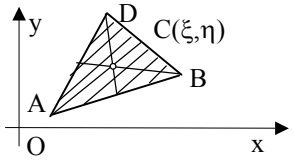
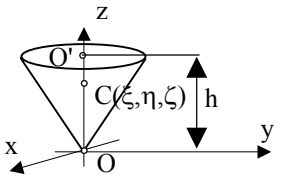
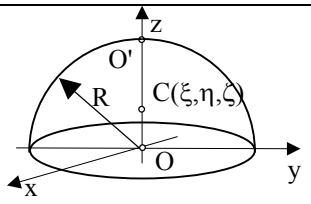
Dacă un sistem (continuum material) se compune dintr-un număr p de subsisteme $(S_1), (S_2),...,(S_p)$ având masele: $M_1, M_2, ..., M_p$ şi centrele de masă $(C_1, C_2,...,C_p)$ *având vectorii de poziție:* $\overline{\rho}_1,\ \overline{\rho}_2,\ \overline{\rho}_2,\ ...\,\overline{\rho}_p$, atunci *vectorul de poziție al centrului de masă al corpului* se determină cu relația:

$$\overline{\rho}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i\overline{\rho}_i}{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i};\qquad \xi=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i},\quad \eta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i},\quad \zeta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{p}M_i}\ ,$$

Dacă un sistem material este rezultatul eliminării dintr-un sistem (S_1) de masă M_1 şi centru de masă C_1, a unui sistem (S_2) de masă M_2 şi centru de masă C_2 , atunci vectorul de poziție al centrului de masă C este dat de:

$$\overline{\rho}=\frac{M_1\overline{\rho}_1-M_2\overline{\rho}_2}{M_1-M_2};\ \xi=\frac{M_1x_1-M_2x_2}{M_1-M_2},\eta=\frac{M_1y_1-M_2y_2}{M_1-M_2},\quad \zeta=\frac{M_1z_1-M_2z_2}{M_1-M_2}$$

În tabelul următor sunt date formule pentru calculul centrelor de greutate ale unor corpuri omogene uzuale:

Nr. crt.	Tipul corpului omogen	Figura	Coordonatele centrului de greutate
1	**Bara omogenă de lungime L**		$\xi = \frac{L}{2};\ \eta = 0$
2	**Bara omogenă: arc de cerc de rază R şi semideschiderea α**		$\xi = R\frac{\sin\alpha}{\alpha};\ \eta = 0$
3	**Placă omogenă în formă de sector circular de rază R şi semideschiderea α**		$\xi = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha};\ \eta = 0$
4	**Placă omogenă în formă de segment de cerc de rază R şi semideschiderea α**		$\xi = \frac{2}{3}R\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$ $\eta = 0$
5	**Placă omogenă plana în formă de triunghi**		$\xi = \frac{x_A + x_B + x_D}{3};$ $\eta = \frac{y_A + y_B + y_D}{3};$
6	**Corp omogen conic de înălțime h**		$\xi = 0;\ \eta = 0;$ $\zeta = \frac{3h}{4}$
7	**Corp omogen semisferic de rază R**		$\xi = 0;\ \eta = 0;$ $\zeta = \frac{3R}{8}$

3.1. CENTRUL DE MASĂ PENTRU BARE OMOGENE

PROBLEME REZOLVATE

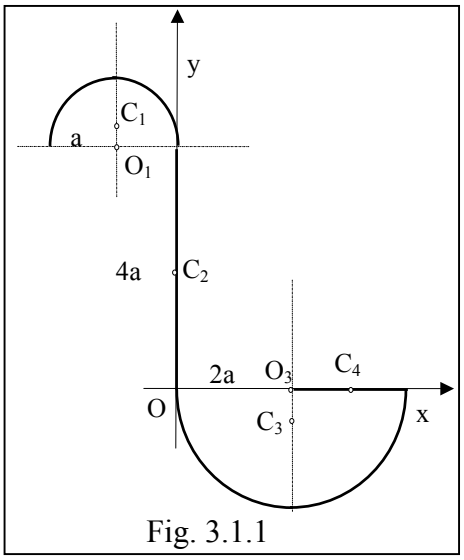


Fig. 3.1.1

3.1.1 Se consideră *o bară omogenă, de forma unui cârlig plan (în planul Oxy ca în fig. 3.1.1), pentru care se cunosc dimensiunea a, razele semicercurilor şi lungimile barelor.*

Se cer *coordonatele centrului de masă al cârligului C (ξ,η), în raport cu sitemul de axe dat.*

Rezolvare:

Cârligul se compune din patru segmente de bară simple:

- două segmente sub formă de semicerc având centrele de masă notate cu $C_1(x_1, y_1)$, $C_3(x_3, y_3)$, respectiv lungimile L_1 şi L_3
- două segmente drepte având centrele de masă $C_2(x_2, y_2)$, $C_4(x_4, y_4)$ respectiv lungimile L_2, L_4.

Faţă de sitemul de axe Oxy, coordonatele centrului de masă $C(\xi,\eta)$ al cârligului, se calculează cu formulele :

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{4} L_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} L_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{1=i}^{4} L_i y_i}{\sum_{1}^{4} L_i}. \tag{a}$$

Pentru segmentul de bară (1) avem:

$$O_1C_1 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ y_1 = 4a + \frac{2a}{\pi} \Rightarrow C_1\left(-a,\ 4a + \frac{2a}{\pi}\right) \\ L_1 = \pi a \end{cases} \tag{b}$$

Pentru segmentul de bară (2) avem:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 2a \Rightarrow C_2(0,2a) \\ L_2 = 4a \end{cases} \tag{c}$$

Pentru segmentul de bară (3) avem:

$$O_3C_3 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2a\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2a \\ y_3 = -\frac{4a}{\pi} \Rightarrow C_3\left(2a, -\frac{4a}{\pi}\right) \\ L_3 = 2\pi a \end{cases} \tag{d}$$

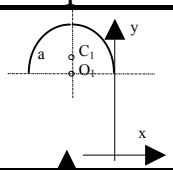
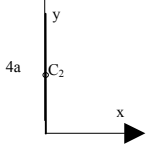
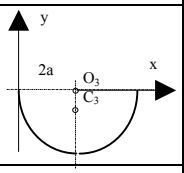
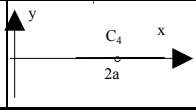
Pentru segmentul de bară (4) avem:

$x_4 = 3a,\ \ y_4 = 0,\ L_4 = 2a \Rightarrow C_4\ (3a,\ 0).$ (e)

Se introduc valorile calculate în formulele lui ξ şi η obţinându-se:

$$\xi = a; \quad \eta = \frac{2(2\pi+1)a}{3(\pi+2)} \quad \Rightarrow C\left(a,\ \frac{2(2\pi+1)a}{3(\pi+2)}\right) \qquad \text{(f)}$$

Acelaşi rezultat se obţine cu ajutorul următorului tabel:

Corpul nr.	Forma corpului	L_i	x_i	y_i	$L_i x_i$	$L_i y_i$
1		πa	$-a$	$4a + \frac{2a}{\pi}$	$-\pi a^2$	$(4\pi+2)\ a^2$
2		$4a$	0	$2a$	0	$8a^2$
3		$2\pi a$	$2a$	$-\frac{4a}{\pi}$	$4\pi a^2$	$-8a^2$
4		$2a$	$3a$	0	$6a^2$	0
	$\Sigma \rightarrow$	$3a(\pi+2)$	–	–	$3a^2\ (\pi+2)$	$2a^2\ (2\pi+1)$

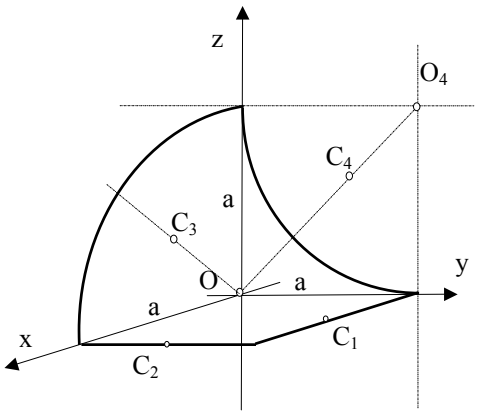


Fig. 3.1.2

3.1.2 ***Se consideră*** *un cadru spaţial format din 4 bare omogene sudate şi dispuse în raport cu sistemul de axe Oxyz, ca în fig. 3.1.2. Se cunosc dimensiunea a, razele semicercurilor (lungimile barelor).*
Se cere *poziţia centrului de masă al cadrului în raport cu sistemul de axe ales*

Rezolvare:

Pentru arcele de cerc poziţiile centrelor de masă sunt date de:

$$OC_3 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}, \quad O_4C_4 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\frac{2a\sqrt{2}}{\pi} \qquad \text{(a)}$$

Coordonatele centrelor de masă ale segmentelor de bară şi lungimile acestora vor fi:

$$C_1\left(\frac{a}{2},\, a,\, 0\right);\quad L_1 = a; \qquad C_3\left(\frac{2a}{\pi}, 0,\, \frac{2a}{\pi}\right);\quad L_3 = \frac{\pi a}{2};$$
$$C_2\left(a,\, \frac{a}{2},\, 0\right);\quad L_2 = a; \qquad C_4\left(a,\, \frac{a(\pi-2)}{\pi},\, \frac{a(\pi-2)}{\pi}\right);\quad L_4 = \frac{\pi a}{2} \tag{b}$$

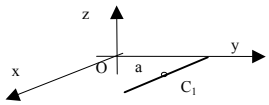
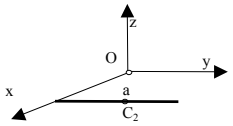
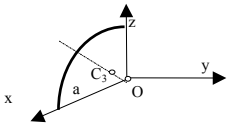
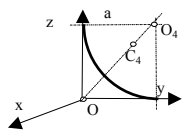
Pentru determinarea coordonatelor centrului de masă al cadrului spațial C (ξ,η,ζ) aplică formulele:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{4} L_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} L_i},\ \eta = \frac{\sum_{i=1}^{4} L_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} L_i},\ \ \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{4} L_i z_i}{\sum_{1}^{4} L_i}. \tag{c}$$

Înlocuind valorile se obțin coordonatele centrului de greutate :

$$\xi = \frac{5}{2(\pi+2)}a,\quad \eta = \frac{\pi+1}{2(\pi+2)}a,\quad \varsigma = \frac{\pi}{2(\pi+2)}a. \tag{d}$$

Acelaşi rezultat se obține completând următorul tabel:

Corp nr.	**Forma corpului**	L_i	x_i	y_i	z_i	$L_i x_i$	$L_i y_i$	$L_i z_i$
1		a	$\frac{a}{2}$	a	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
2		a	a	$\frac{a}{2}$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
3		$\frac{\pi a}{2}$	$\frac{2a}{\pi}$	0	$\frac{2a}{\pi}$	a^2	0	a^2
4		$\frac{\pi a}{2}$	0	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	0	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$
Σ		a(2+π)	–	–	–	$\frac{5a^2}{2}$	$\frac{(\pi+2)a^2}{2}$	$\frac{\pi a^2}{2}$

S3.2. CENTRUL DE MASĂ PENTRU PLĂCI OMOGENE

PROBLEME REZOLVATE

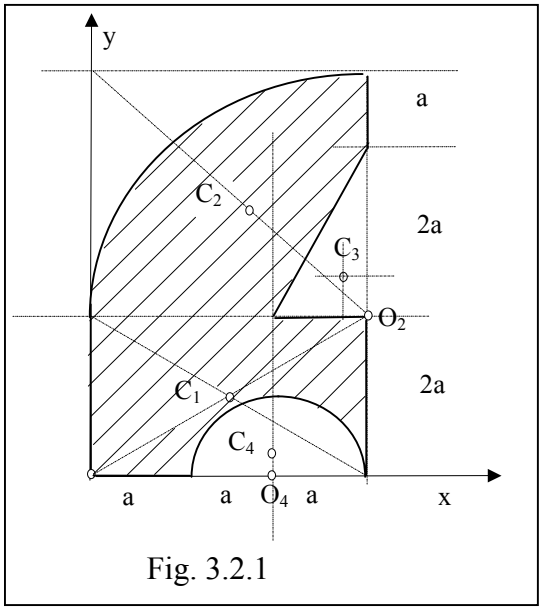


Fig. 3.2.1

3.2.1 ***Se consideră*** *o placă plană omogenă având forma din fig. 3.2.1 . Se cunoaşte dimensiunea a.*

Se cere *să se determine poziţia centrului de masă C (ξ,η) al plăcii faţă de sistemul de axe Oxy considerat în fig. 3.2.1.*

Rezolvare

Placa omogenă se compune din 4 părţi simple având centrele de masă $C_i\ (x_i, y_i)$ şi ariile A_i *(i=1,2,3,4)* ca în fig. 3.2.1.

Ţinând seama de relaţia care dă poziţia centrul unui sector circular de rază *R* şi unghi la centru 2α , avem:

$$O_2C_2 = \frac{2}{3}\cdot 3a\cdot\frac{sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}a}{\pi};\quad O_4C_4 = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi} \qquad \text{(a)}$$

Coordonatele centrului de masă al plăcii faţă de sistemul de axe Oxy se determină cu ajutorul relaţiilor:

$$\xi = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3 - A_4x_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4},\quad \eta = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 - A_3y_3 - A_4y_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4} \qquad \text{(b)}$$

Pentru fiecare din cele patru plăci simple: placa 1(dreptunghiul *3a x 2a*), placa 2 (sector circular de rază 3a), placa 3 (triunghiul *a x 2a* , care se decupează) şi placa 4 (sector circular de rază *a* , care se decupează) avem:

$$x_1 = 3a/2;\ y_1 = a;\quad A_1 = 6a^2$$

$$x_2 = 3a - 4a/\pi;\ y_2 = 2a + 4a/\pi;\quad A_2 = 9\pi a^2/4 \qquad \text{(c)}$$

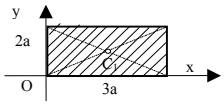
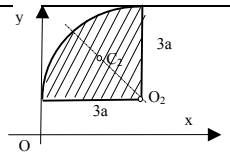
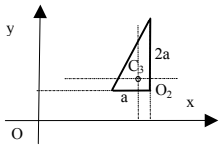
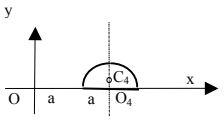
$$x_3 = 8a/3;\ y_3 = 8a/3;\quad A_3 = a^2$$

$$x_4 = 2a;\ y_4 = 4a/3\pi;\quad A_1 = \pi a^2/2$$

Înlocuind în relaţiile lui ξ şi η de mai sus se obţine:

$$\xi = \frac{(69\pi - 32)}{3(7\pi + 20)}a,\quad \eta = \frac{2(27\pi + 70)}{3(7\pi + 20)}a \text{ ,sau } \xi = 1{,}4667a;\ \eta = 2{,}458a. \qquad \text{(d)}$$

La acelaşi rezultat se ajunge completând următorul tabel :

Corpul nr.	Figura	A_i	x_i	y_i	$A_i\, x_i$	$A_i\, y_i$
1		$6a^2$	$\frac{3a}{2}$	a	$9a^3$	
2		$\frac{9a^2\pi}{4}$	$3a-\frac{4a}{\pi}$	$2a+\frac{4a}{\pi}$	$\frac{9}{4}a^3(3\pi-4)$	$\frac{9a^3}{2}(\pi-2)$
3		$-a^2$	$\frac{8a}{3}$	$\frac{8a}{3}$	$-\frac{8a^3}{3}$	$-\frac{8a^3}{3}$
4		$-\frac{\pi a^2}{2}$	$2a$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\pi a^3$	$-\frac{2}{3}a^3$
	$\Sigma \rightarrow$	$\frac{7\pi+20}{4}a$	–	–	$\frac{69\pi-32}{12}a^3$	$\frac{27\pi+70}{6}a^3$

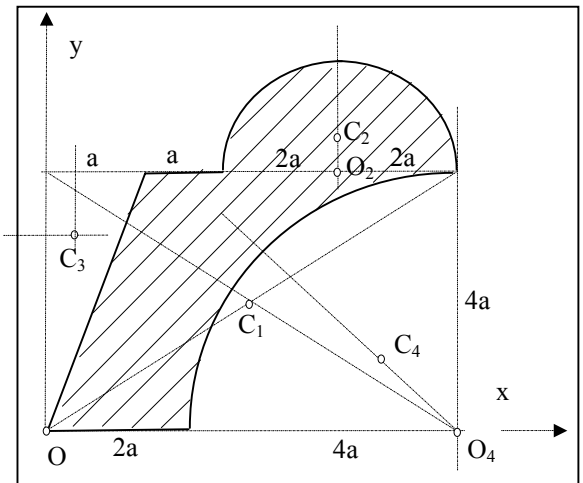


Fig. S3.2.2

3.2.2 Se consideră *o placă plană omogenă având forma din fig. 3.2.2. pentru care se cunoaşte dimensiunea a.* ***Se cere*** *să se determine poziția centrului de masă C (ξ,η) al plăcii față de sistemul de axe Oxy considerat.*

Rezolvare

Coordonatele centrului de masă al plăcii față de sistemul de axe Oxz se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi=\frac{A_1x_1+A_2x_2-A_3x_3-A_4x_4}{A_1+A_2-A_3-A_4},\quad \eta=\frac{A_1y_1+A_2y_2-A_3y_3-A_4y_4}{A_1+A_2-A_3-A_4} \tag{a}$$

Ținând seama de relația care dă poziția centrul unui sector circular de rază *R* şi unghi la centru 2α, avem:

$$O_2C_2=\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{8a}{3\pi};\quad O_4C_4=\frac{2}{3}\cdot 4a\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{16\sqrt{2}a}{3\pi} \tag{b}$$

Pentru placa simplă 1(dreptunghiul $6a \times 4a$):

$$x_1 = 3a;\ y_1 = 2a;\quad A_1 = 24a^2 \tag{c}$$

Pentru placa simplă 2 (sector circular de rază $2a$):

$$x_2 = 4a;\ y_2 = 4a + 8a/3\pi;\quad A_2 = 2\pi a^2 \tag{d}$$

Pentru placa simplă 3 (triunghiul $4a \times a$, care se decupează):

$$x_3 = a/3;\ y_3 = 8a/3;\quad A_3 = 2a^2 \tag{e}$$

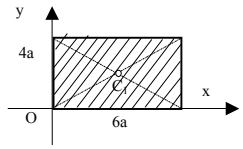
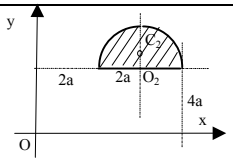
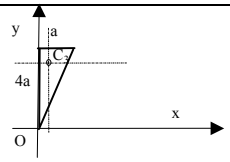
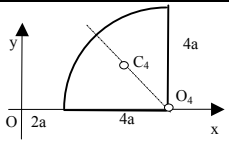
Pentru placa simplă 4 (sector circular de rază $4a$, care se decupează):

$$x_4 = 6a - 16a/3\pi;\ y_4 = 16a/3\pi;\quad A_1 = 4\pi a^2 \tag{f}$$

Înlocuind în relația de mai sus se obține:

$$\xi = \frac{136 - 24\pi}{3(11-\pi)}a = 2{,}57a\ ;\ \eta = \frac{4(10+3\pi)}{3(11-\pi)}a = 3{,}296a \tag{g}$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă se completează următorul tabel :

Figura nr.	**Forma**	$\mathbf{A_i}$	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{A_i x_i}$	$\mathbf{A_i\, y_i}$
1		$24a^2$	$3a$	$2a$	$72a^3$	$48a^3$
2		$2\pi a^2$	$4a$	$4a + \frac{8a}{3\pi}$	$8\pi a^3$	$(8\pi + \frac{13}{3})a^3$
3		$-2a^2$	$\frac{a}{3}$	$\frac{8a}{3}$	$-\frac{2}{3}a^3$	$-\frac{16}{3}a^3$
4		$-4\pi a^2$	$6a - \frac{16a}{3\pi}$	$\frac{16a}{3\pi}$	$(24\pi + \frac{64}{3})a^3$	$-\frac{64}{3}a^3$
Σ		$(22-2\pi)a^2$	–	–	$\frac{278-48\pi}{3}a^3$	$\frac{80+24\pi}{3}a^3$

3.2.3 Se consideră *o placă omogenă de forma unui pătrat de latură a din care se decupează un triunghi isoscel de înălțime h ca în fig. 3.2.3.* ***Se cere*** *să se determine înălțimea triunghiului isoscel astfel încât centrul de masă C (ξ,η) să coincidă cu vîrful triunghiului.*

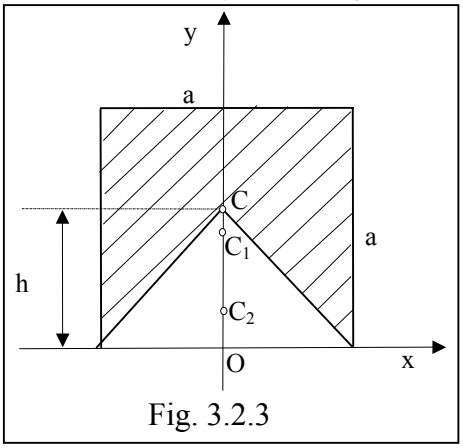


Fig. 3.2.3

Rezolvare:

Față de sistemul de axe Oxy din fig. 3.2.3, coordonatele centrelor de greutate pentru pătrat şi pentru triunghi sunt:

$C_1\ (0,\ a/2)\ ,\quad C_2(0,h/3)$ (a)

iar ariile corespunzătoare sunt:

$$A_1 = a^2,\ A_2 = \frac{ah}{2}.$$ (b)

Coordonata a centrului de greutate după Oy se dxetremină cu ajutorul relației: $\eta = \dfrac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A}$. (c)

Condiția $\eta=h$ conduce la următoarea ecuație de gradul II în h: $2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0$ având soluțiile: $h_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} a$ (e)

Întrucât $h<a$, are sens numai $h = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} a = 0{,}634a$ (f)

PROBLEME PROPUSE

Pentru plăcile plane omogene având forma şi dimensiunile ca în figurile 3.2.4… 3.2.13 se cere să se determine poziția centrului de greutate C(ξ,η) în raport cu sistemul de axe Oxy considerat.

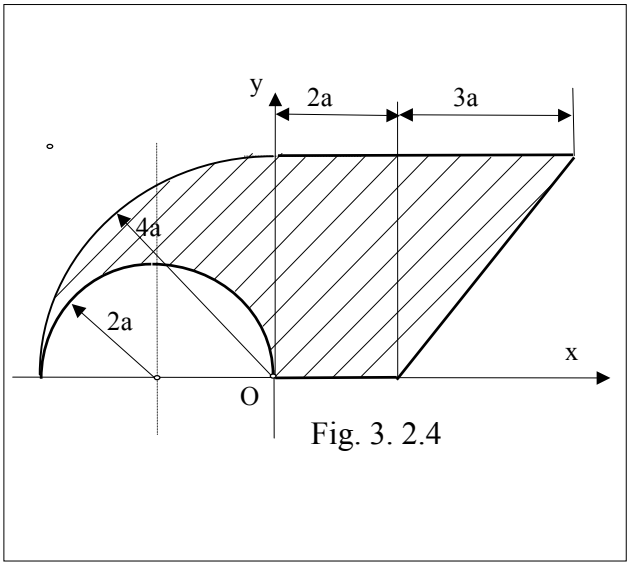


Fig. 3. 2.4

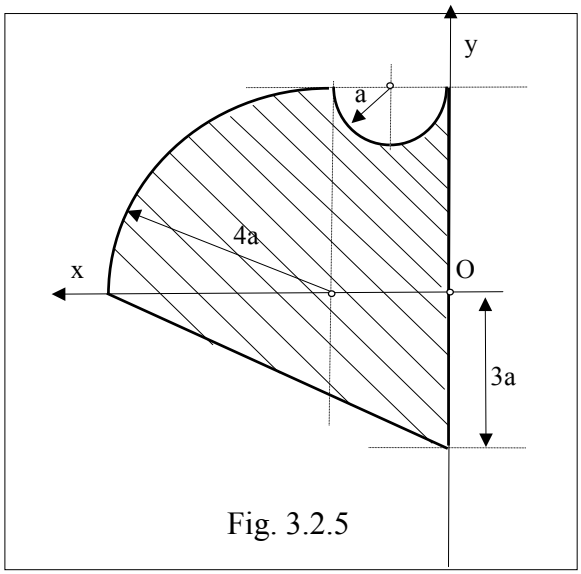


Fig. 3.2.5

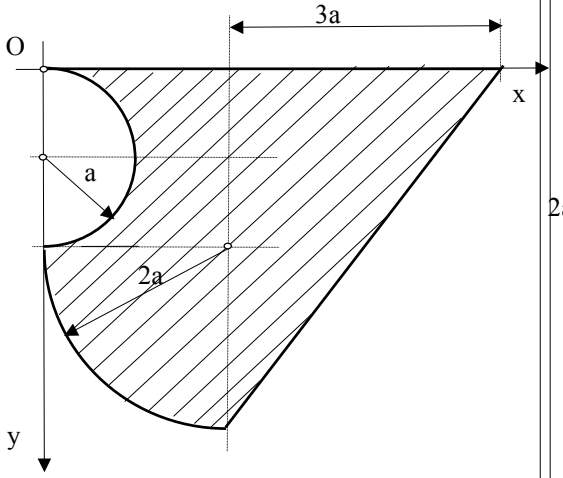


Fig. 3. 2.6

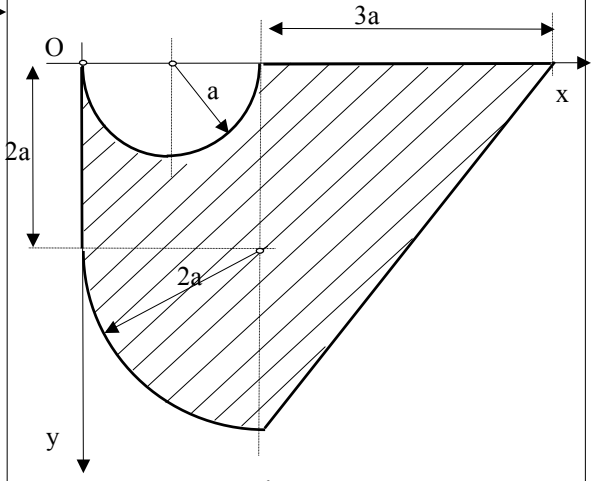


Fig. 3. 2.7

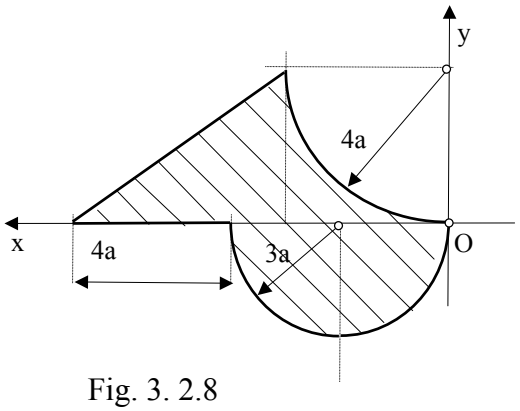


Fig. 3. 2.8

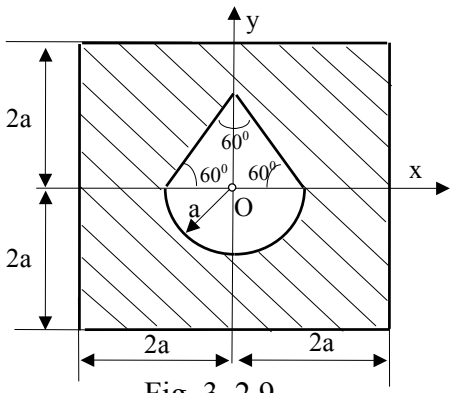


Fig. 3. 2.9

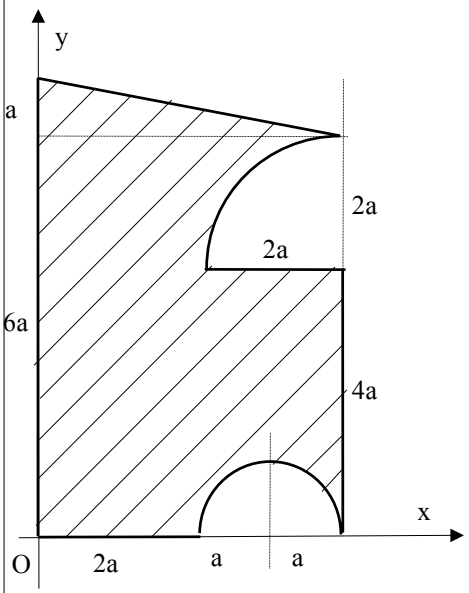


Fig. 3. 2.10

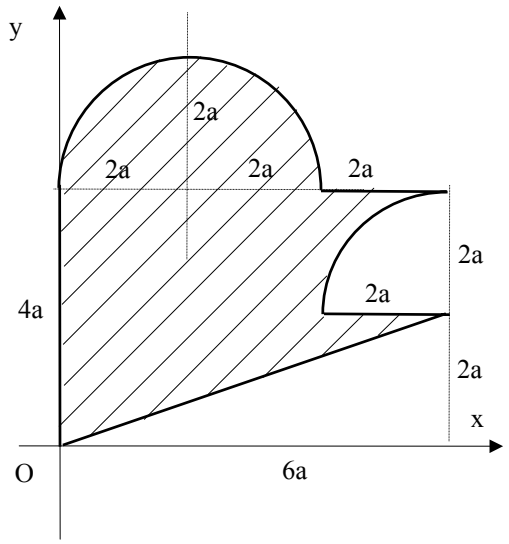


Fig. 3. 2.11

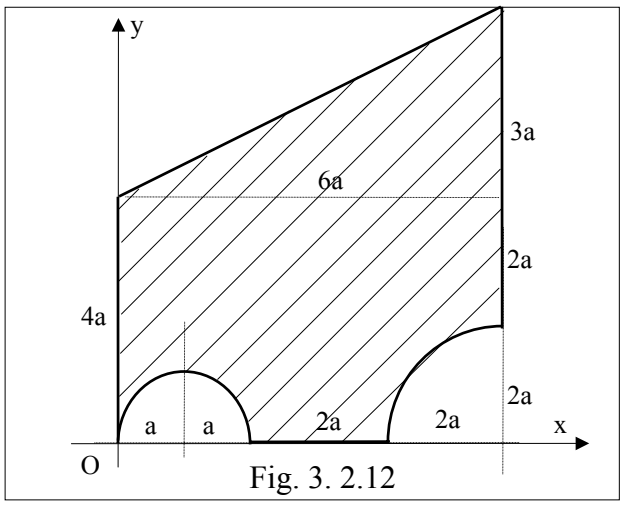


Fig. 3. 2.12

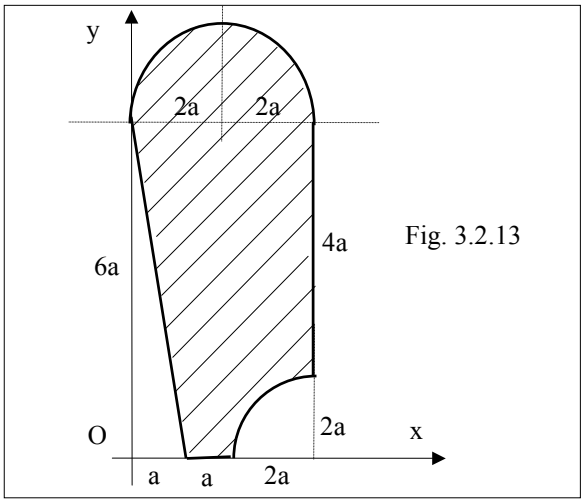


Fig. 3.2.13

RĂSPUNSURI

Nr.pr.	ξ	η
3.2.4	$\frac{(12\pi+14)a}{3(2\pi+14)}=0{,}8496a$	$\frac{48a}{(2\pi+14)}=2{,}3665a$
3.2.5	$\frac{(284+45\pi)a}{3(34+7\pi)}=2{,}5324a$	$\frac{2(29-2\pi)a}{(34+7\pi)}=0{,}8114a$
3.2.6	$\frac{2(56+6\pi)a}{3(20+\pi)}=2{,}1563a$	$\frac{(88+9\pi)a}{3(20+\pi)}=1{,}6748a$
3.2.7	$\frac{(116+9\pi)a}{3(20+\pi)}=2{,}6212a$	$\frac{2(14+2\pi)a}{(20+\pi)}=1{,}753a$
3.2.8	$\frac{(520+81\pi)a}{3(56+\pi)}=4{,}365a$	$\frac{2(154-48\pi)a}{3(56+\pi)}=0{,}0361a$
3.2.9	0	$-\frac{5a}{3(32-2\sqrt{3}-\pi)}=0{,}0656a$
3.2.10		
3.2.11		
3.2.12		
3.2.13		

3.3. CENTRUL DE MASĂ PENTRU CORPURI OMOGENE

PROBLEME REZOLVATE

3.3.1 Se consideră *un corp omogen tridimensional cu o axă de simetrie, având forma din fig. 3.3.1, format dintr-o semisferă de diametru D=2R=40mm şi un cilindru de înălţime h=50mm şi diametru d=2r =22mm.*

Se cere *să se determine poziţia centrului de greutate al nitului C (0,0,ζ) în raport cu sistemul de axe considerat în figură.*

Rezolvare

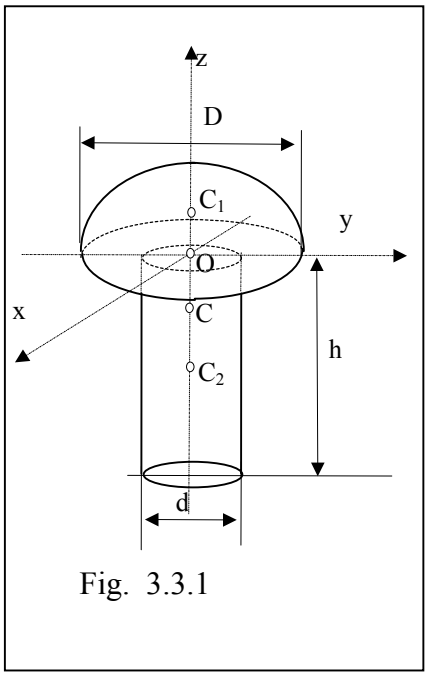


Fig. 3.3.1

Pentru sistemul de axe Oxyz considerat în fig. 3.3.1 centrele de greutate ale celor două corpuri simple se află pe axa de simetrie Oz; astfel:

- pentru semisferă:

$$OC_1 = z_1 = \frac{3R}{8} = \frac{3D}{16} \qquad V_1 = \frac{\pi D^3}{12}; \tag{a}$$

- pentru cilindru:

$$OC_2 = -z_2 = \frac{h}{2}, \quad , \qquad V_2 = \frac{\pi d^2 h}{4}. \tag{b}$$

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \frac{3(D^4 - 8d^2h^2)}{16(D^3 + 3d^2h)} \tag{c}$$

Se obține: ζ = *- 0,977 cm* (d)

3.3.2. Se consideră *un corp omogen tridimensional cu o axă de simetrie format dintr–o semisferă şi un con ca în fig. 3.3.2. Se cunoaşte raza semisferei R şi a bazei conului r =R.*

Se cere *înălţimea h a conului astfel încât centrul de greutate al corpului să coincidă cu centrul bazei conului (sau cu originea sistemului de axe C ≡ 0)*

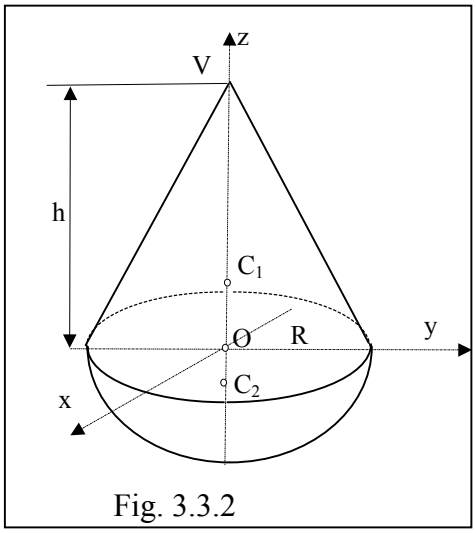


Fig. 3.3.2

Rezolvare:

Conul şi semisfera au centrele de greutate C_1 şi C_2 pe axa Oz având coordonatele :

$$z_1 = OC_1 = \frac{h}{4}, \qquad z_2 = -OC_2 = -\frac{3}{8}R \tag{a}$$

Volumele celor două corpuri simple sunt:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}R^2 h; \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 \tag{b}$$

Coordonata centrului de greutate după axa Oz se determină cu ajutorul relației:

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2 - 3R^2}{h + 2R} \tag{c}$$

Impunând condiția: C≡O, adică $\zeta = 0$ rezultă:

$$h^2 - 3R^2 = 0 \tag{d}$$

cu soluțiile $h = \pm R\sqrt{3}$, are sens numai $h = R\sqrt{3} = 1{,}732R$ (e)

CAPITOLUL IV
ECHILIBRUL FORȚELOR APLICATE SOLIDULUI RIGID

REZUMAT DE TEORIE

a. Teoremele generale ale echilibrului rigidului liber

În cazul rigidului liber, echilibrul este realizat dacă şi numai dacă *torsorul de reducere* al sistemului de forțe care acționează asupra lui, într-un punct O, este nul:

$$\tau_O = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0, & \sum Z_i = 0 \\ \sum L_i = 0, & \sum M_i = 0, & \sum N_i = 0 \end{cases}$$

unde:

- X_i ,Y_i, Z_i sunt proiecțiile forțelor exterioare $\overline{F}_i$ pe axele sistemului cartezian Ox, Oy, respectiv Oz;
- x_i, y_i z_i - coordonatele punctului de aplicație al forței $\overline{F}_i$
- $L_i = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i)$, $M_i = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i)$, $N_i = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i)$ - proiecțiile momentelor forțelor exterioare $\overline{F}_i$ pe axele sistemului cartezian *Ox, Oy,* respectiv *Oz*;

Dacă sistemul de forțe ce acționează asupra rigidului liber este coplanar (de exemplu:se află în planul Oxy) atunci ecuațiile de mai sus devin:

$$\tau_O = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0 \\ & \sum N_i = 0 \end{cases}$$

b. Teoremele generale ale echilibrului rigidului supus la legături

Dacă rigidul este supus la legături (prin legături se înțelege un număr de constrângeri geometrice care se aplică rigidului care duc la micşorarea numărului de grade de libertate - pentru rigidul liber acest număr este 6), se aplică axioma legăturilor care postulează că: *orice legătură geometrică poate fi întotdeauna suprimată şi înlocuită cu elemente mecanice corespunzătoare (care pot fi forțe sau momente-cupluri de legătură) numite reacțiuni*.

Dacă se notează torsorul forțelor de legătură cu: $\tau_O^{leg} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R}^{leg} \\ \overline{M}_O^{leg} \end{cases}$

şi torsorul forțelor exterioare (aplicate) cu: $\tau_O^{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R}^{a} \\ \overline{M}_O^{a} \end{cases}$

atunci echilibrul rigidului este realizat dacă şi numai dacă :

$$\tau_O^a + \tau_O^{leg} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R}^a + \overline{R}^{leg} = 0 \\ \overline{M}_O^a + \overline{M}_O^{leg} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^a + X^{leg} = 0, \quad Y^a + Y^{leg} = 0, \quad Z^a + Z^{leg} = 0 \\ L^a + L^{leg} = 0, \quad M^a + M^{leg} = 0, \quad N^a + N^{leg} = 0 \end{cases}$$

Legăturile ideale uzuale ale rigidului sunt :

- reazemul simplu (prinderea cu fir)
- articulația sferică
- articulația cilindrică (articulația plană)
- încastrarea.

Prin suprimarea unei legături, conform axiomei legăturilor se introduc elemente mecanice corespunzătoare tipului de posibilități de mişcare suprimate: forțe dacă sunt suprimate translații, cupluri dacă sunt suprimate rotații. Aceste elemente sunt necunoscute ale problemei date.

Dacă rigidul este supus unor legături reale (cu frecare) atunci la condițiile de echilibru de mai sus (cele 6 ecuații generale) se mai adaugă relația/relațiile corespunzătoare tipului de legătură cu frecare existent şi anume:

- frecarea de alunecare din cuplele de alunecare: $T \le \mu N$;
- frecarea de rostogolire din cuplele de rostogolire: $M_r \le sN$;
- frecarea de pivotare din pivoți axiali: $M_p \le \mu R_m N$;
- frecarea din lagărele cu alunecare: $M_f \le \mu r F$.

În toate cazurile legăturilor cu frecare , aceste forțe /cupluri se opun totdeauna tendinței corpului de a executa orice fel de mişcare.

4.1. ECHILIBRUL RIGIDULUI LIBER SUB ACȚIUNEA UNUI SISTEM SPAȚIAL DE FORȚE

PROBLEME REZOLVATE

4.1.1. Se consideră *o placă omogenă în formă de paralelipiped dreptunghic cu muchiile OA=4a, OC=6a, OO'=a, aflată în echilibru sub acțiunea greutății proprii G, a forței P cunoscute ca direcție sens şi modul şi a forțelor* $(F_i)_{i=1,\ 2,..6}$*, cunoscute ca direcție şi sensuri dar necunoscute ca modul (fig. 4.1.1).* ***Se cer*** *mărimile forțelor* F_i *pentru ca echilibrul forțelor să aibă loc .*

Rezolvare:

Expresiile analitice ale vectorilor forțe față de sistemul de axe Oxy sunt:

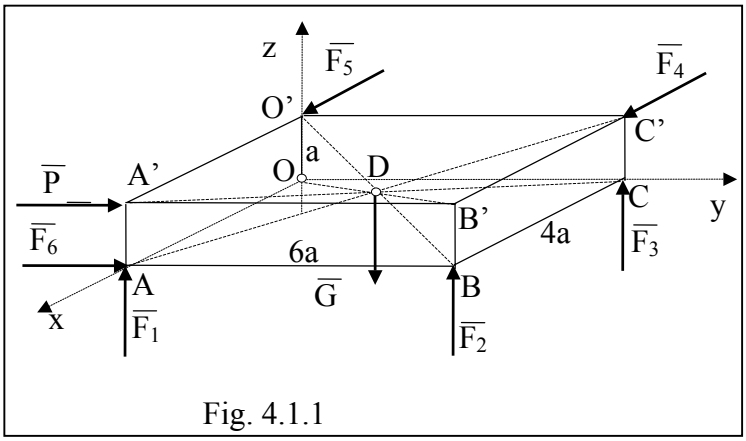


Fig. 4.1.1

$$\overline{P}=P\bar{j};\qquad \overline{G}=-G\bar{k}$$
$$\overline{F_1}=F_1\bar{k};\qquad \overline{F_2}=F_2\bar{k}$$
$$\overline{F_3}=F_3\bar{k};\qquad \overline{F_4}=F_4\bar{i};\qquad (a)$$
$$\overline{F_5}=F_5\bar{i};\qquad \overline{F_6}=F_6\bar{j};$$

Expresiile analitice ale momentelor acestor forțe în raport cu O sunt:

$$\overline{M}_O(\overline{P})=\overline{OA'}\times\overline{P}=(4a\bar{i}+a\bar{k})\times P\bar{j}=4aP\bar{k}-aP\bar{i}$$
$$\overline{M}_O(\overline{G})=\overline{OD}\times\overline{G}=(2a\bar{i}+3a\bar{j}+0{,}5a\bar{k})\times(-G\bar{k})=2aG\bar{j}-3aG\bar{i}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_1})=\overline{OA}\times\overline{F_1}=4a\bar{i}\times F_1\bar{k}=-4aF_1\bar{j}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_2})=\overline{OB}\times\overline{F_2}=(4a\bar{i}+6a\bar{j})\times F_2\bar{k}=-4aF_2\bar{j}+6aF_2\bar{i}\qquad (b)$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_3})=\overline{OC}\times\overline{F_3}=6a\bar{j}\times F_3\bar{k}=6aF_3\bar{i}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_4})=\overline{OC'}\times\overline{F_4}=(6a\bar{j}+a\bar{k})\times F_4\bar{i}=-6aF_4\bar{k}+aF_4\bar{j}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_5})=\overline{OO'}\times\overline{F_5}=a\bar{k}\times F_5\bar{i}=aF_5\bar{j}$$
$$\overline{M}_O(\overline{F_6})=\overline{OA}\times\overline{F_6}=4a\bar{i}\times F_6\bar{j}=4aF_6\bar{k}$$

Ecuațiile vectoriale de echilibru ale rigidului liber ($\overline{R}=0;\ \overline{M}_O=0$), scrise în proiecții pe cele trei axe ale sistemului triortogonal Oxyz sunt:

$$X=F_4+F_5=0\qquad L=-aP-3aG+6aF_2+6aF_3=0$$
$$Y=F_6+P=0\qquad M=2aG-4aF_1-4aF_2+aF_4+aF_5=0\qquad (c)$$
$$Z=F_1+F_2+F_3-G=0\qquad N=4aP-6aF_4+4aF_6=0$$

Rezolvând acest sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute rezultă:

$$F_1=G/2-P/6;\quad F_4=0;\quad F_2=P/6;\quad F_5=0;\quad F_3=G/2;\quad F_6=-P.\ (d)$$

4.2. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI SUB ACȚIUNEA UNUI SISTEM DE FORȚE COPLANARE

PROBLEME REZOLVATE

4.2.1 Se consideră *o bară omogenă de lungime AB=2ℓ şi greutate G care se reazemă cu capătul A pe un perete vertical iar în punctul D pe o muchie fixă situată la distanța a față de peretele vertical (fig. 4.2.1.a). Legăturile din A şi D sunt fără frecare.* ***Se cer:*** *1) unghiul θ pe care îl face bara cu orizontala pentru echilibru; 2) mărimile reacțiunilor din A şi D.*

Rezolvare

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil şi conform axiomei legăturilor se introduc în A şi D forțele de legătură $\overline{N}_A$ *si* $\overline{N}_D$ (fig. 4.2.1.b).

Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei scrise în proiecții pe cele trei axe sunt:

$$\sum X_i = 0: \quad N_A - N_D \sin\theta = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad N_D \cos\theta - G = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_{Az} = 0: \quad -G\ell\cos\theta + N_D \frac{a}{\cos\theta} = 0$$

Primele două ecuații conduc la:

$$N_D = \frac{1}{\cos\theta} G, \quad N_A = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} G \qquad \text{(b)}$$

care introduse în ecuația a treia conduc la:

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}, \quad \text{sau} \quad \theta = \arccos\sqrt[3]{\frac{a}{\ell}} \qquad \text{(c)}$$

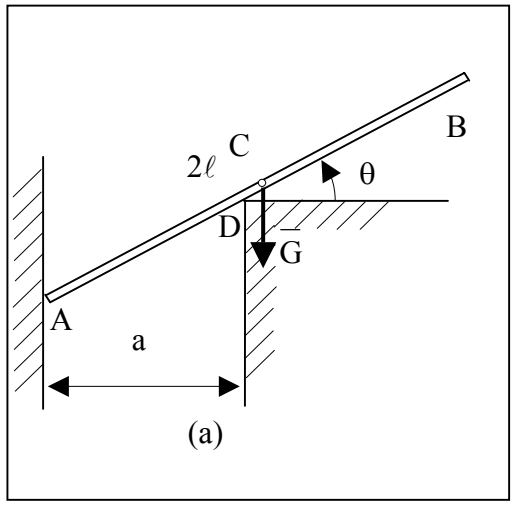
Echilibrul este posibil dacă:

$$0 \le \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}} \le 1, \quad \text{sau} \quad 0 \le a \le \ell \qquad \text{(d)}$$

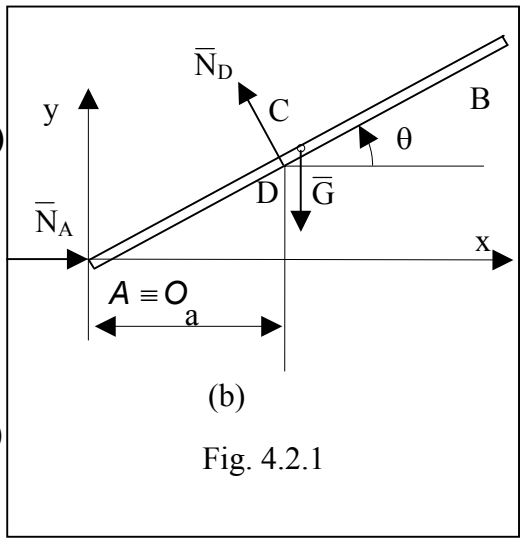
Înlocuind valoarea unghiului θ în expresiile reacțiunilor N_A şi N_D se obține:

$$N_D = G \cdot \sqrt[3]{\frac{\ell}{a}},$$

$$N_A = G \cdot \sqrt[3]{\frac{\ell}{a}} \cdot \sqrt[3]{1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2} \qquad \text{(e)}$$



(a)



(b)

Fig. 4.2.1

4.2.2 Se consideră *o bară omogenă de lungime AB=2ℓ şi greutate G care se reazemă cu capătul A în colțul format de un perete orizontal şi unul vertical, iar în punctul D se reazemă pe o muchie fixă situată la distanța a față de peretele vertical (fig. 4.2.2.a). Legătura din D este fără frecare.*

Se cer *mărimile reacțiunilor din A şi D.*

Rezolvare

Se alege sistemul de referință Oxy ca în fig. 4.2.2.b şi conform axiomei legăturilor se introduc în A şi D forțele de legătură $\overline{N}_A$ *si* $\overline{N}_D$

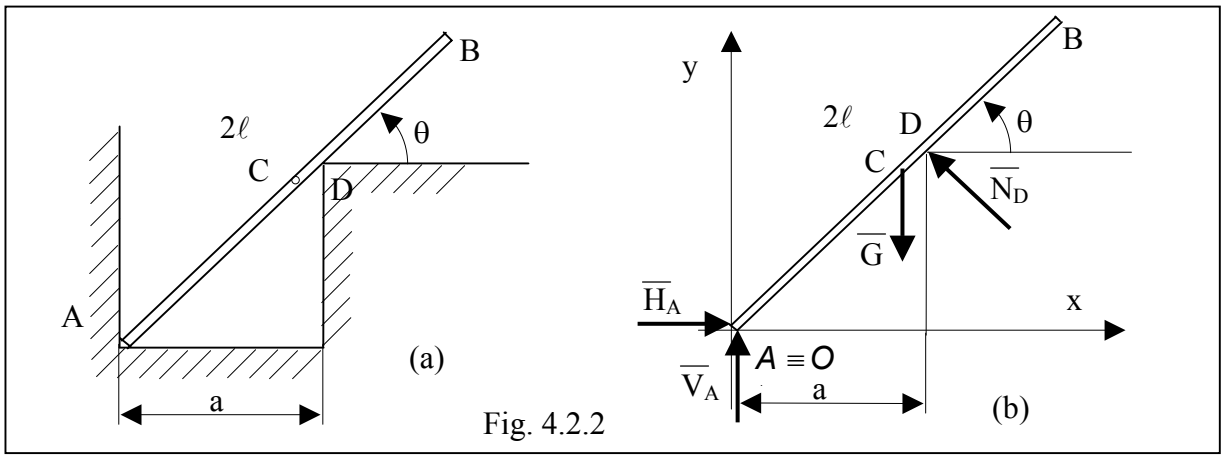


Fig. 4.2.2

Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei în proiecții pe cele tri axe se scriu:

$$\sum X_i = 0 \qquad H_A - N_D \sin\theta = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \qquad V_A + N_D \cos\theta - G = 0 \tag{a}$$
$$\sum M_{zA} = 0 \qquad -G\ell\cos\theta + N_D \frac{a}{\cos\theta} = 0$$

Din ecuația a treia se obține:

$$N_D = G\frac{\ell}{a}\cos^2\theta \tag{b}$$

iar din primele două ecuații rezultă componentele reacțiunii din A:

$$H_A = G\cdot\frac{\ell}{a}\cdot\sin\theta\cdot\cos^2\theta;$$
$$V_A = G\left(1-\frac{\ell}{a}\cos^3\theta\right). \tag{c}$$

Deci mărimea reacțiunii din A este:

$$R_A = \sqrt{H_A^{\,2} + V_A^{\,2}} = G\cdot\sqrt{\left(\frac{\ell}{a}\cdot\sin\theta\cdot\cos^2\theta\right)^2 + \left(1-\frac{\ell}{a}\cos^3\theta\right)^2} \tag{d}$$

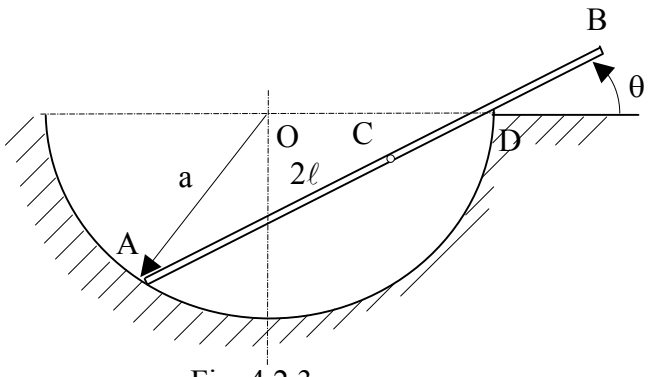


Fig. 4.2.3.a

4.2.3 Se consideră *o bară omogenă de lungime AB=2ℓ şi greutate G care se reazemă cu capătul A pe o cavitate semicilindrică de rază a, iar în punctul D pe muchia fixă a cavității (fig. 4.2.3.a). Rezemările din A şi D sunt fără frecare.*

Se cer:

1) unghiul θ pe care îl face bara cu orizontala pentru echilibru;

2) mărimile reacțiunilor din A şi D.

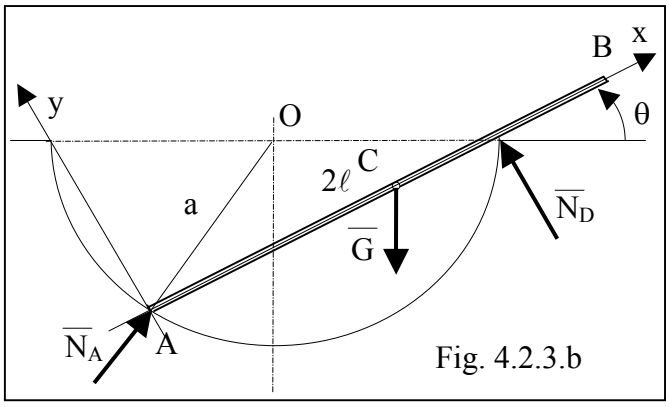


Fig. 4.2.3.b

Rezolvare

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil şi conform axiomei legăturilor se introduc în A şi D forțele de legătură $\overline{N}_A$ *si* $\overline{N}_D$ (fig. 4.2.3.b). Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei se scriu:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum X_i = 0 \;: \quad N_A - G\sin\theta = 0 \\ &\textstyle\sum Y_i = 0 \;: \quad N_A\sin\theta + N_D - G\cos\theta = 0 \\ &\textstyle\sum M_{zA} = 0 : \; -G\ell\cos\theta + N_D 2a\cos\theta = 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Din prima şi a treia ecuație se obțin mărimile reacțiunilor $\overline{N}_A$ *si* $\overline{N}_D$:

$$N_A = G\sin\theta; \qquad N_D = G\frac{\ell}{2a} \qquad \text{(b)}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (b) rezultă ecuația de gr. II:

$$4a\cos^2\theta - \ell\cos\theta - 2a = 0 \qquad \text{(c)}$$

având soluțiile: $\cos\theta = \dfrac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 32a^2}}{8a}$. (d)

Întrucât problema are sens dacă : $0 \le \theta \le \pi/2$, este valabilă doar soluția pozitivă. Condiția de echilibru se scrie: $\dfrac{\ell + \sqrt{\ell^2 + 32a^2}}{8a} \le 1 \Rightarrow \ell \le 2a$ (e)

4.2.4 Se consideră *o placă triunghiulară omogenă de greutate G situată în plan vertical, care se reazemă în A pe un perete vertical iar în punctul O este articulată de mediul fix (dimensiunile plăcii şi distanța de la articulație la peretele vertical sunt date în fig. 4.2.4.a). Legăturile din A şi O sunt fără frecare.* ***Se cer*** *mărimile reacțiunilor din A şi O.*

Rezolvare

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil şi conform axiomei legăturilor se introduc în A şi O forțele de legătură $\overline{N}_A$, $\overline{X}_O$ *si* $\overline{Y}_O$ (fig. 4.2.4.b). Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei, în proiecții pe cele trei axe se scriu:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum X_i = 0 \quad X_O - G\sin\theta - N_A\cos\theta = 0 \\ &\textstyle\sum Y_i = 0 \quad Y_O - G\cos\theta + N_A\sin\theta = 0 \\ &\textstyle\sum M_{zO} = 0 \quad (N_A\sin\theta)8a + (G\sin\theta)y_C - (G\cos\theta)x_C = 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

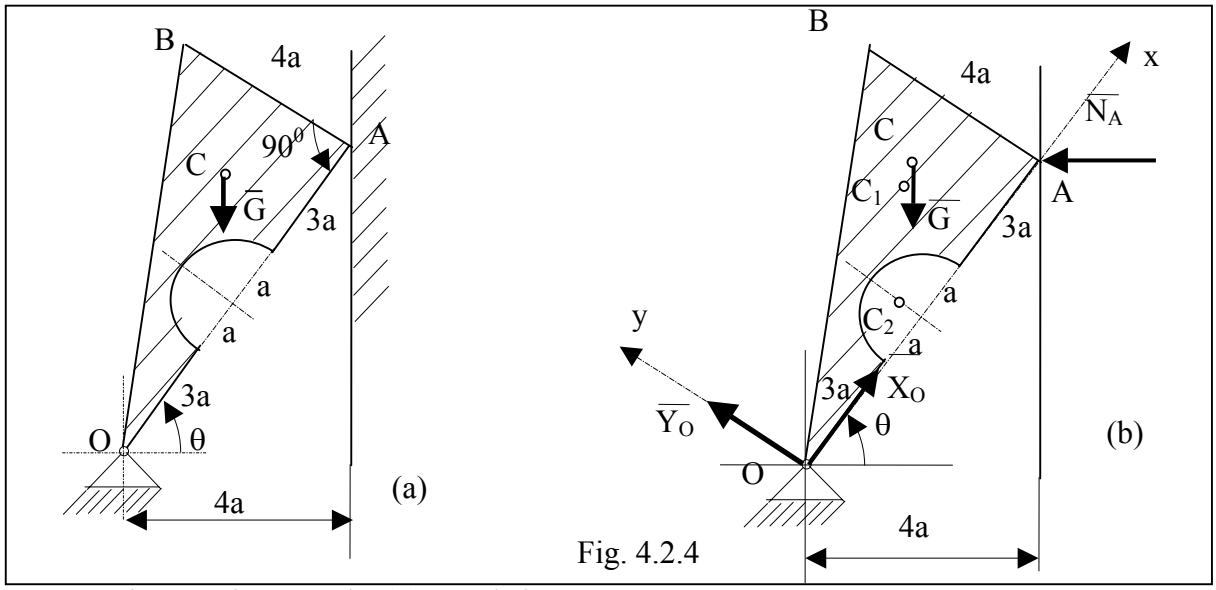


Fig. 4.2.4

Din a treia ecuație (a) se obține :

$$N_A = G\left(\frac{x_C}{8a}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{y_C}{8a}\right); \tag{b}$$

Înlocuind această valoare în prima şi a doua ecuație (a) rezultă:

$$\begin{aligned} X_O &= G\left(\sin\theta - \frac{x_C}{8a}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{y_C}{8a}\cos\theta\right); \\ V_O &= G\left(\cos\theta + \frac{y_C}{8a}\sin\theta - \frac{x_C}{8a}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{c}$$

Din triunghiul OBA se determină : $\cos\theta = \frac{1}{2};\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Coordonatele centrului de greutate al plăcii $C(x_C, y_C)$ se determină cu ajutorul relațiilor:

$$x_C = \frac{A_1 x_{C1} - A_2 x_{C2}}{A_1 - A_2};\ \ y_C = \frac{A_1 y_{C1} - A_2 y_{C2}}{A_1 - A_2}, \tag{d}$$

unde:

$$\begin{aligned} &A_1 = 16a^2;\ A_2 = \pi a^2/2; \\ &x_{C1} = 11a/3;\ \ y_{C1} = 4a/3;\ \ x_{C2} = 4a;\ y_{C2} = 4a/3\pi \end{aligned} \tag{e}$$

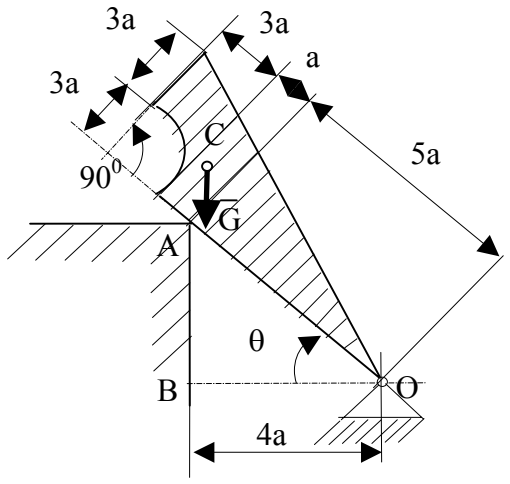
Înlocuind rezultă:

$$x_C = \frac{4(128-3\pi)}{3(32-\pi)}a = 5{,}4785a;\ \ y_C = \frac{124a}{3(32-\pi)} = 1{,}4323a \tag{f}$$

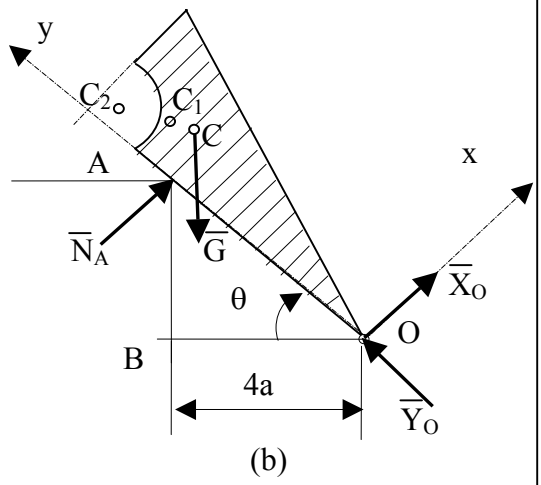
Deci valorile reacțiunilor după înlocuirea parametrilor de mai sus sunt:

$$N_A = 0{,}216\,G;\ \ X_O = 0{,}974\,G;\ \ Y_O = 0{,}313\,G \tag{g}$$

4.2.5 Se consideră *o placă triunghiulară omogenă de greutate G, situată într-un plan vertical, care se reazemă în A pe muchia unui perete vertical, iar în punctul O este legată de mediul fix printr-o articulaţie cilindrică (dimensiunile plăcii şi distanţa de la articulaţie la peretele vertical sunt date fig. 4.2.5.a). Legăturile din A şi O sunt fără frecare.* ***Se cer*** *mărimile reacţiunilor din A şi O.*



(a)



(b)

Fig. 4.2.5

Rezolvare

Se alege sistemul de referinţă Oxy convenabil şi se introduc în A şi O forţele de legătură $\overline{N}_A$, $\overline{X}_O$ *si* $\overline{Y}_O$ (conform axiomei legăturilor, fig. 4.2.5.b). Ecuaţiile de echilibru a forţelor /momentelor în proiecţii pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum X_i = 0 \qquad X_O - G\cos\theta + N_A = 0 \\ &\textstyle\sum Y_i = 0 \qquad Y_O - G\sin\theta = 0 \\ &\textstyle\sum M_{zO} = 0 \qquad N_A \cdot 5a + (G\sin\theta)x_C - (G\cos\theta)y_C = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Din a doua ecuaţie se obţine : $Y_O = G\sin\theta$ (b)

Din a treia ecuaţie se obţine :

$$N_A = \left(\frac{y_C\cos\theta}{5a} - \frac{x_C\sin\theta}{5a}\right)G; \tag{c}$$

Înlocuind această valoare în prima ecuaţie rezultă:

$$X_O = \left(\cos\theta - \frac{y_C\cos\theta}{5a} + \frac{x_C\sin\theta}{5a}\right)G; \tag{d}$$

Din triunghiul OBA se determină valorile : $\cos\theta = \frac{4}{5};\ \sin\theta = \frac{3}{5}.$ (e)

Poziţia centrului de greutate al plăcii triunghiulare $C(x_C, y_C)$ se determină cu ajutorul relaţiilor: $x_C = \frac{A_1x_{C1} - A_2x_{C2}}{A_1 - A_2};\ y_C = \frac{A_1y_{C1} - A_2y_{C2}}{A_1 - A_2},$ (f)

unde:

$$A_1 = 27a^2;\ A_2 = 9\pi a^2/4;$$
$$x_{C1} = 2a;\ y_{C1} = 6a;\ \ x_{C2} = 4a/\pi;\ y_{C2} = 9a - 4a/\pi \qquad \text{(g)}$$

Înlocuind rezultă:

$$x_C = \frac{20a}{12-\pi} = 2{,}2577a; \qquad y_C = \frac{76-9\pi}{12-\pi}a = 5{,}3876a \qquad \text{(h)}$$

Valorile reacțiunilor după înlocuirea parametrilor de mai sus sunt:

$$N_A = 0{,}591G;\ X_O = 0{,}09G;\ \ Y_O = 0{,}8G\,. \qquad \text{(i)}$$

4.2.6. Se consideră *un cadru legat de mediul fix printr-o articulație cilindrică O şi un reazem A, asupra căruia acționează un sistem de forțe, cupluri şi sarcini distribuite uniform ca în fig. 4.2.6.a. Se cunosc: a, q, α, F=2aq, M=3a²q.*

Se cer *mărimile reacțiunilor din reazemul A şi articulația O.*

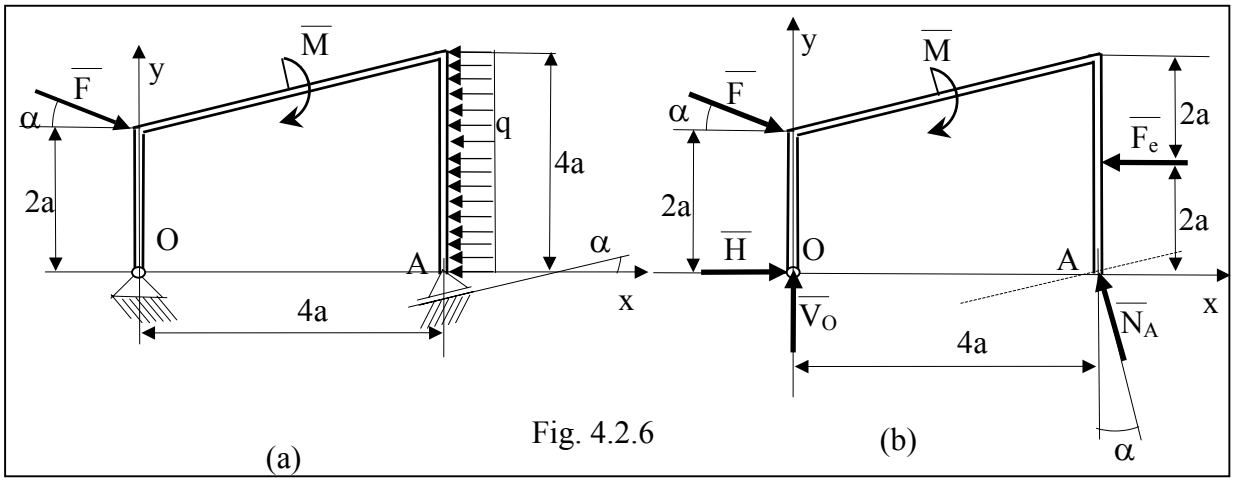


Fig. 4.2.6

Rezolvare

Se alege convenabil sistemul de referință Oxy şi se introduc în A şi O forțele de legătură $\overline{N}_A$, $\overline{H}_O$ *si* $\overline{V}_O$ (conform axiomei legăturilor, fig. 4.2.6.b). Sarcina uniform distribuită *q* se înlocuieşte cu o forță echivalentă concentrată $\overline{F}_e$ ce acționează la mijlocul distanței pe care este sarcina distribuită: $F_e = 4aq$.

Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei, în proiecții pe cele trei axe se scriu:

$$\sum X_i = 0 \qquad H_O + F\cos\alpha - F_e - N_A \sin\alpha = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \qquad V_O - F\sin\alpha + N_A\cos\alpha = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$\sum M_{zO} = 0 \quad (N_A\cos\alpha)\cdot 4a + F_e\cdot 2a - (F\cos\theta)\cdot 2a - M = 0$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$N_A = \frac{4\cos\alpha - 5}{4\cos\alpha}aq; \qquad H_O = \left(\frac{11}{4} - \cos\alpha\right)aq; \qquad V_O = \left(\frac{5}{4} + 2\sin\alpha - \cos\alpha\right)aq \qquad \text{(b)}$$

4.2.7 Se consideră *un cadru plan legat la mediul fix printr-o articulaţie cilindrică A şi un reazem B, asupra căruia acţionează un sistem de forţe, cupluri şi sarcini distribuite uniform şi triunghiular, ca în fig. 4.2.7.a. Se cunosc: a, q, $F_1=ap$, $F_2=4ap$, $F_3=ap$, $M=3a^2p$. Se cer mărimile reacţiunilor din A şi B.*

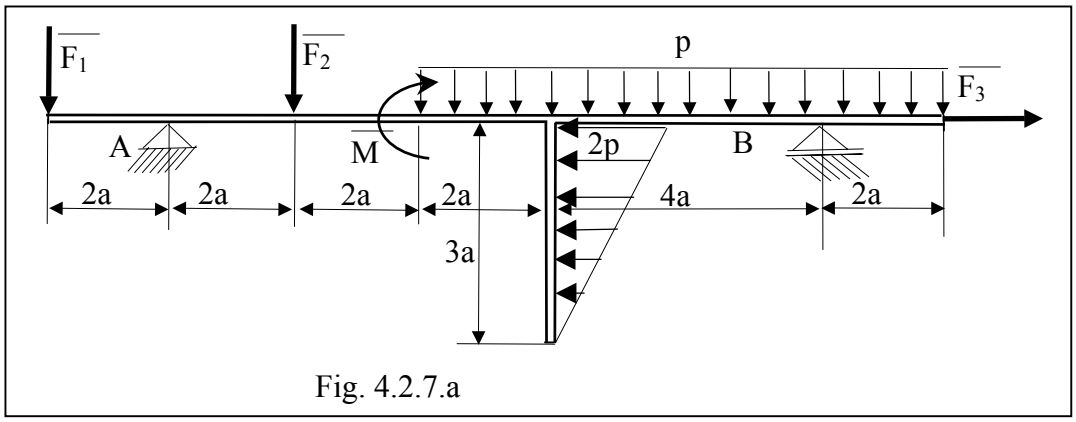


Fig. 4.2.7.a

Rezolvare

Se alege sistemul de referinţă Oxy cu originea în punctul A (O≡A, fig. 4.2.7.b). Se înlocuiesc legăturile A ş B cu reacţiunile corespunzătoare V_A, H_A, V_B şi sarcinile distribuite cu forţele echivalente corespunzătoare F_{ec1} şi F_{ec2}.

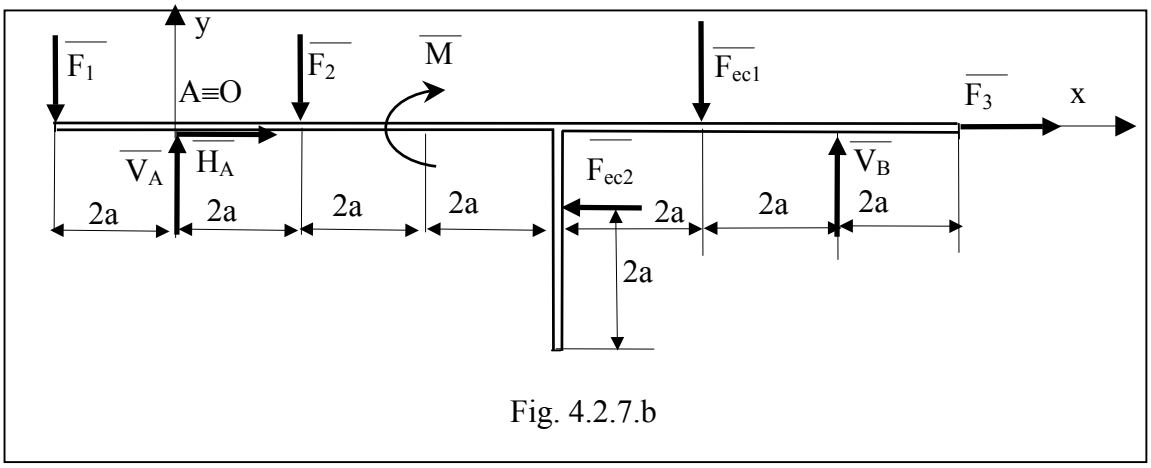


Fig. 4.2.7.b

Pentru determinarea reacţiunilor V_A, H_A, V_B se scriu :

- ecuaţia de echilibru a momentelor forţelor şi cuplurilor: $\Sigma M_O=0$

$$V_B \cdot 10a+F_1 \cdot 2a-F_2 \cdot 2a-M-F_{ec1} \cdot 8a-F_{ec2} \cdot a=0 \qquad (a)$$

- ecuaţia de echilibru a forţelor după direcţia Ox: $\Sigma X=0$

$$H_A+F_3-F_{ec2}=0 \qquad (b)$$

- ecuaţia de echilibru a a forţelor după direcţia Oy: $\Sigma Y=0$

$$V_A+ V_A -F_1-F_2-F_{ec1}=0 \qquad (c)$$

Se obţin următoarele rezultate: $V_A=pa$; $H_A=5,4\,pa$; $V_B=7,6\,pa$ (d)

Generalizând rezolvarea pentru acest tip de problemă, pentru determinarea reacțiunilor V_A, H_A, V_B (având sensul axelor Ox şi Oy) se scriu: ecuația de echilibru a momentelor forțelor şi cuplurilor ($\Sigma M_O=0$) şi două ecuații de echilibru a forțelor şi sarcinilor distribuite ($\Sigma X_i=0$ şi $\Sigma Y_i=0$). Se obține următorul sistem de 3 ecuații :

$$V_B x_B + \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) + M = 0; \qquad H_A + X^e = 0 ; \qquad V_A + V_B + Y^e = 0 \qquad \text{(e)}$$

unde s-a notat :

- $X^e = \Sigma X_i$, $Y^e = \Sigma Y_i$, suma proiecțiilor forțelor exterioare pe axa *Ox şi Oy ;*
- X_i , Y_i , proiecțiile forței exterioare $\overline{F_i}$ pe axele Ox respectiv Oy;
- x_i, y_i coordonatele punctului de aplicație al forței $\overline{F_i}$

Rezolvând acest sistem rezultă următoarele valori ale reacțiunilor:

$$V_B = -(\Sigma (x_i Y_i - y_i X) + M)/x_B \;\; ; \;\; H_A = -X ; \qquad V_A = -Y - V_B$$

Aceste relații au fost introduse în programul EXCEL obținându-se următoarele rezultate:

ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ŞI REZULTATE OBȚINUTE PENTRU PROBLEMA 4.2.7

DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Nr.	**x_B/a**	**y_B/a**	**x_1/a**	**y_1/a**	**X_1/pa**	**Y_1/pa**	**x_2/a**	**y_2/a**	**X_2/pa**	**Y_2/pa**	**x_3/a**
0											
1	10	0	-2	0	0	-1	2	0	0	-4	12

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X
y_3/a	**X_3/pa**	**Y_3/pa**	**x_4/a**	**y_4/a**	**X_4/pa**	**Y_4/pa**	**x_5/a**	**y_5/a**	**X_5/pa**	**Y_5/pa**	**M/pa^2**
0	1	0	8	0	0	-8	6	-1	-3	0	-3

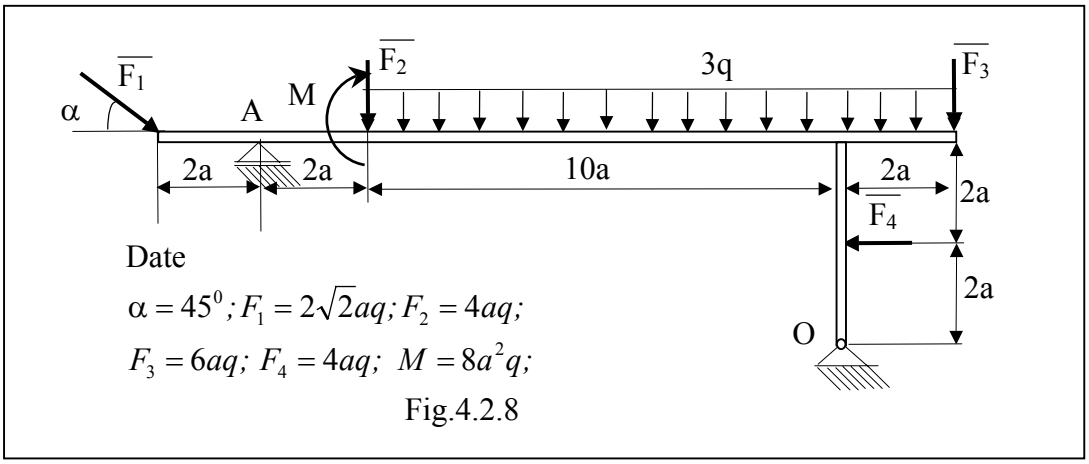
DATE DE IESIRE

Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
ΣX_i/pa	**ΣY_i/pa**	**$\Sigma X_i y_i$/pa^2**	**$\Sigma Y_i x_i$/pa^2**	**V_B/pa**	**H_A/pa**	**V_A/pa**
E1+I1+M1+ Q1+U1	F1+J1+N1+ R1+V1	E1*D1+I1*H1+M1* L1+Q1*P1+U1*T1	F1*C1+J1*G1+N1* K1+ R1*O1+V1*S1	(AA1-AB1- X1)/A1	-Y1	-AC1-Z1
-2	-13	3	-70	7,6	2	5,4

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *un cadru plan legat de mediul fix printr-o articulaţie O şi un reazem simplu A, asupra căruia acţionează un sistem de forţe, cupluri şi sarcini distribuite uniform ca în figurile 4.2.8 ... 4.2.10. Se cunosc: a, q, α, F_1... F_4, M.*

Se cer *mărimile reacţiunilor din reazemul A şi articulaţia O.*

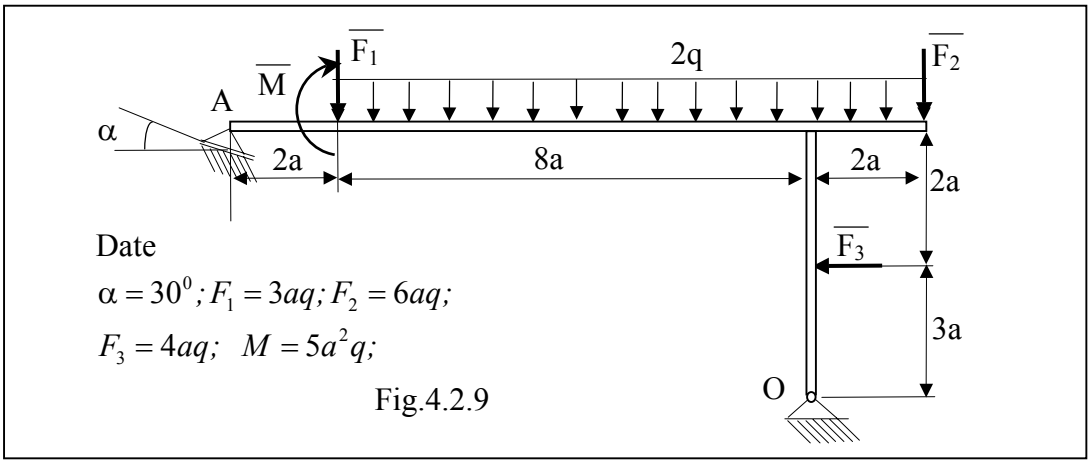


Date

$\alpha = 45^0; F_1 = 2\sqrt{2}aq; F_2 = 4aq;$

$F_3 = 6aq;\ F_4 = 4aq;\ M = 8a^2q;$

Fig.4.2.8

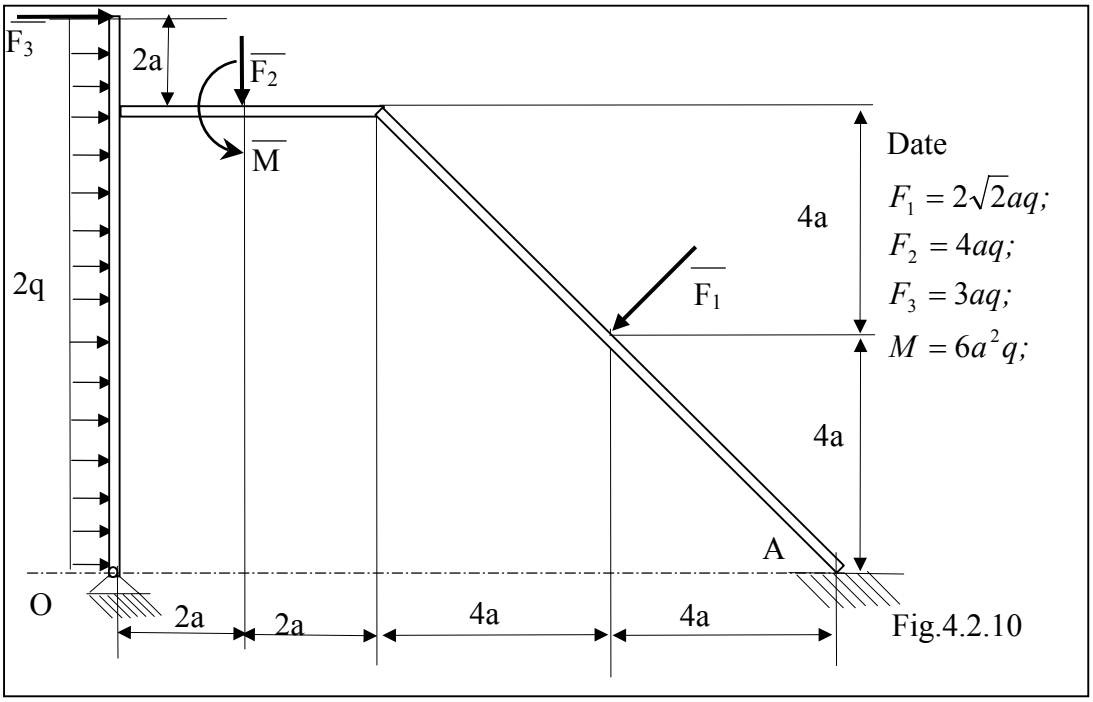


Date

$\alpha = 30^0; F_1 = 3aq; F_2 = 6aq;$

$F_3 = 4aq;\ \ M = 5a^2q;$

Fig.4.2.9



Date

$F_1 = 2\sqrt{2}aq;$

$F_2 = 4aq;$

$F_3 = 3aq;$

$M = 6a^2q;$

Fig.4.2.10

CAPITOLUL V
ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

REZUMAT DE TEORIE

a. Teoremele generale ale echilibrului sistemelor de corpuri

Dacă un sistem de puncte materiale $\{A_i\}_{i=1,2,...n}$ interacționează mecanic (se atrag sau se resping) atunci acestea formează un *sistem mecanic de puncte materiale.* Forțele care acționează asupra sistemelor de puncte materiale se clasifică convențional în *forțe interioare* şi *forțe exterioare*. *Forțele interioare* reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele sistemului şi sunt egale ca mărime două câte două, au acelaşi suport şi sunt dirijate în sens opus(conform principiului acțiunii şi reacțiunii) .

Un corp rigid poate fi considerat ca un sistem nedeformabil de puncte materiale (un sistem pentru care distanța dintre două puncte interioare oarecare ale sistemului rămâne tot timpul constantă).

Un sistem de corpuri rigide $\{C_i\}_{i=1,2,...m}$, $m < n$, poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale format din subsisteme rigide sau nedeformabile (fiecare subsistem corspunde unuia dintre corpurile rigidului).

Forțele care acționează asupra sistemelor de corpuri pot fi forțe interioare (care exprimă interacțiunea dintre corpurile sistemului) şi forțe exterioare (care exprimă interacțiunea cu alte corpuri din afara sistemului).

Forțele şi cuplurile de legătură dintre corpurile sistemului şi dintre corpurile sistemului şi mediul exterior sunt necunoscute ale problemei de echilibru al sistemului de corpuri.

Pentru studiul echilibrului sistemelor de corpuri rigide se aplică cele trei teoreme (principii) cunoscute:

a. Teorema separării corpurilor

Dacă un sistem de corpuri (liber sau supus la legături) se află în echilibru, atunci fiecare corp al sietemului , considerat ca un subsistem rigid, se află de asemenea în echilibru.

Această teoremă se aplică începând cu izolarea fiecărui corp, înlocuirea legăturilor cu elemente mecanice corespunzătoare, (forțe, cupluri de legătură, numite şi reacțiuni), continuând cu scrierea ecuațiilor de echilibru scalare (trei ecuații pentru corpuri în plan şi şase ecuații pentru corpuri în spațiu) pentru fiecare corp al sistemului. La aceste ecuații se ataşează şi condițiile fizice corespunzătoare, privind tipul de legături cu frecare existente. Această metodă permite determinarea tuturor forțelor de legătură (interioare şi exterioare).

b. Teorema solidificării

Dacă un sistem de corpuri rigide , liber sau supus la legături exterioare, se află în echilibru sub acțiunea unor forțe direct aplicate, el poate fi considerat ca un sistem rigid (sistem nedeformabil) de corpuri, păstrându-se legăturile exterioare inițiale. Teorema solidificării se poate enunța astfel: *Condiţia necesară (dar nu şi suficientă) ca un sistem de corpuri să fie în echilibru, este ca torsorul forţelor exterioare (active şi de legătură) să fie nul.*

Această metodă se aplică singură atunci când numărul de necunoscute ale legăturilor exterioare nu depăşesc numărul de ecuații independente (trei ecuații în plan şi şase ecuații în spațiu). Dacă apar mai multe necunoscute, atunci se aplică teorema echilibrului părților.

c. Teorema echilibrului părților

Dacă un sistem de corpuri rigide este în echilibru, atunci o parte oarecare din sistem , considerată ca rigid (subsistem nedeformabil), este de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare şi interioare corespunzătoare subsistemului.

5.1. ECHILIBRUL SISTEMELOR FORMATE DIN BARE RIGIDE ARTICULATE (CADRE PLANE)

5.1.1 Se consideră *sistemul format din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.1. Se cunosc: a, q, α , $F_1 = 3aq$, $F_2 = 5aq$, $F_3 = aq$, $F_4 = 2aq$, $M = 4a^2q$.* ***Se cer*** *forțele de legătură din reazemul A, articulația O_1 şi încastrarea O_2*

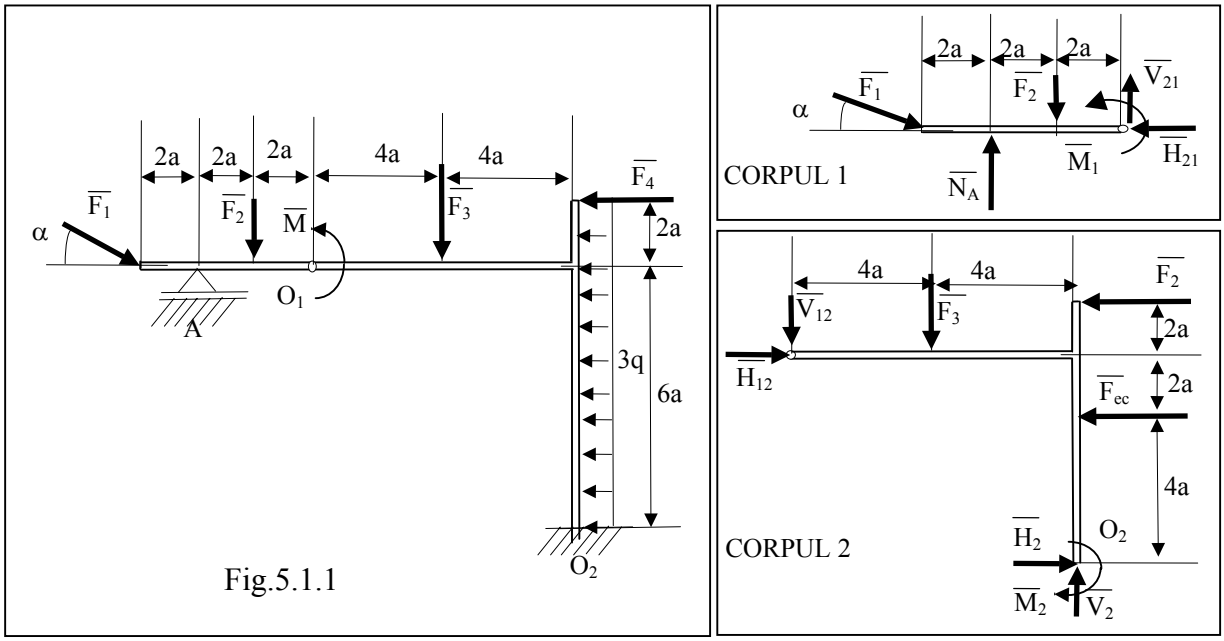


Fig.5.1.1

Rezolvare:

Se separă cele două cadre şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură; se ține seama că: $H_{21}=H_{12}=H_1$; $V_{21}=V_{12}=V_1$ (conform principiului al treilea al

Mecanicii); se înlocuieşte forţa uniform distribuită cu o forţă concentrată: $F_{ec} = 24aq$ şi se scriu ecuaţiile de echilibru pentru fiecare cadru:

Cadrul 1:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \;\; 3aq\cos\alpha - H_1 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \;\; V_1 + N_A - 5aq - 3aq\sin\alpha = 0 \\ \Sigma M_{01} = 0 \;\; N_A \cdot 4a - (3aq\sin\alpha)\cdot 6a - 5aq\cdot 2a - 4a^2 q = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow H_1 = 3aq\cos\alpha,\; N_A = \frac{aq}{2}(9\sin\alpha + 7),\; V_1 = \frac{3aq}{2}(1-\sin\alpha) \quad (b)$$

Cadrul2:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0: H_1 - 2aq - 24aq + H_2 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0; -V_1 - aq + V_2 = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0; M_2 - 24aq\cdot 4a - 2aq\cdot 8a - aq\cdot 4a - V_1\cdot 8a + H_1\cdot 6a = 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$H_2 = aq(26 - 3\cos\alpha), V_2 = \frac{aq}{2}(5 - 3\sin\alpha),\; M_2 = 2a^2 q(64 - 6\sin\alpha - 9\cos\alpha) \quad (d)$$

5.1.2. Se consideră *sistemul format din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.2. Se cunosc: a, q, $F_1 = 6\sqrt{2}aq$, $F_2 = 10aq$, $F_3 = 12aq$, $M = 2a^2 q$.*
Se cer: *Forţele de legătură din: reazemul simplu A, articulaţia O_1 şi încastrarea O_2.*

Rezolvare:

Se separă cele două cadre şi se introduc forţele de legătură; se ţine seama că: $H_{21}=H_{12}=H_1$; $V_{21}=V_{12}=V_1$ şi se înlocuieşte forţa uniform distribuită cu o forţă concentrată $F_{ec} = 24aq$. Ecuaţiile de echilibru pentru fiecare cadru se scriu:

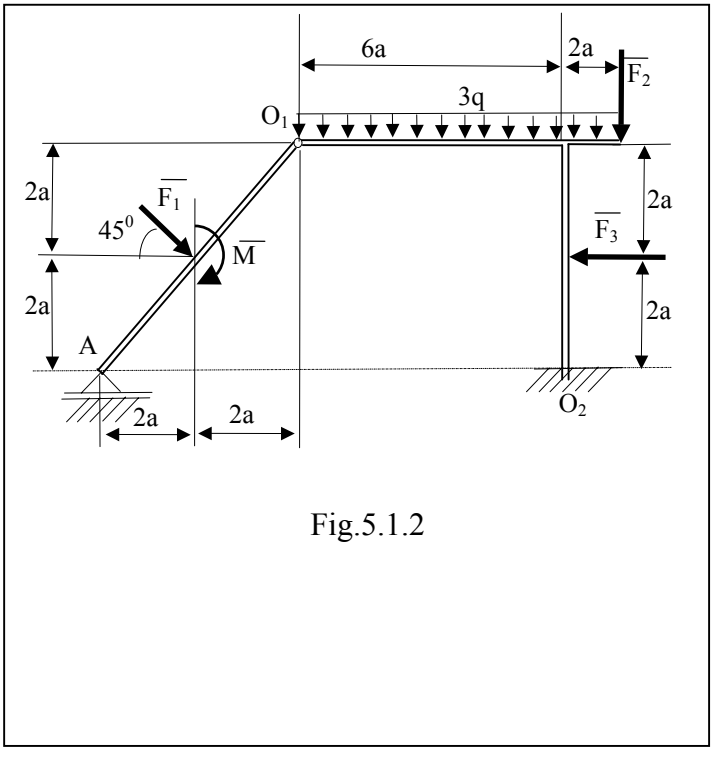
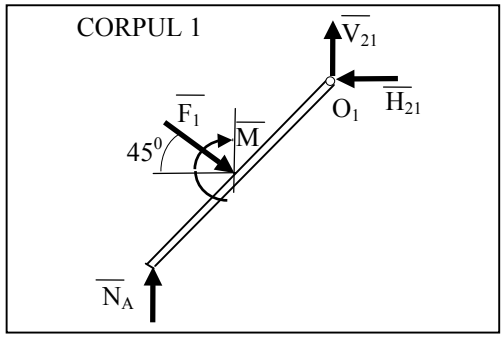
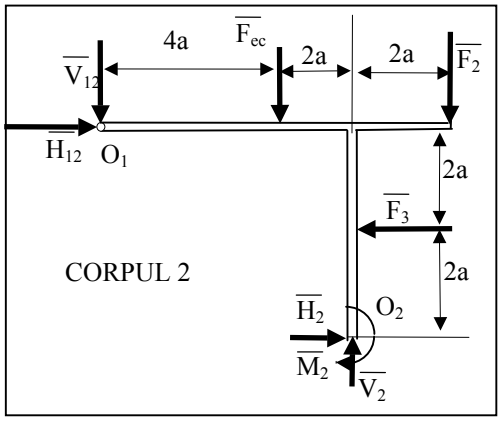


Fig.5.1.2





Cadrul 1:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0: -H_1 + 6aq = 0 \\ \Sigma Y_i = 0: N_A + V_1 - 6aq = 0 \\ \Sigma M_{01} = 0: N_A \cdot 4a + 2a^2 q - 6aq \cdot 2a - 6aq \cdot 2a = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow H_1 = 6aq,\ N_A = \frac{11}{2} aq, V_1 = \frac{qa}{2} \quad (b)$$

Cadrul 2:

$$\begin{cases} \Sigma X_1 = 0; H_1 + H_2 - 12aq = 0 \\ \Sigma Y_i = 0; -V_1 + V_2 - 24aq - 10aq = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0; M_2 - 12aq \cdot 2a + 10aq \cdot 2a - 24aq \cdot 2a - V_1 \cdot 6a + H_1 \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$\Rightarrow H_2 = 6aq, V_2 = \frac{69}{2} aq, M_2 = 31a^2 q \quad (d)$$

5.1.3. Se consideră *sistemul format din două cadre plane articulate între ele în punctul C şi la mediul fix în punctele A şi B, încărcat cu forţe concentrate, sarcini distribuite şi cupluri ca în fig. 5.1.3. Se cunosc valorile lui a şi p.*

Se cer *forţele de legătură din articulaţiile A, B şi C*

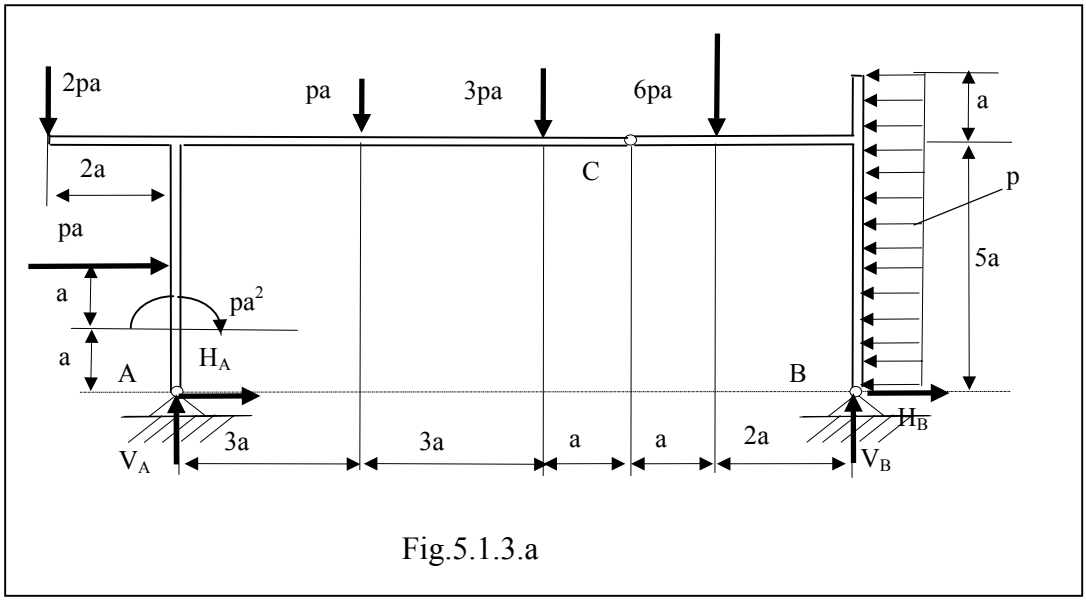


Fig.5.1.3.a

Rezolvare:

Necunoscutele V_A şi V_B se determină prin aplicarea *teoremei solidificării* astfel: din ecuaţia de momente pentru întregul sistem faţă de punctul B, se determină V_A şi din ecuaţia de momente faţă de punctul A, se determină V_B.

- din $\Sigma M_{Bz}=0$ *(pentru tot sistemul)* $\Rightarrow$

$$V_A \cdot 10a + pa^2 + pa \cdot 2a - 2pa \cdot 12a - pa \cdot 7a - 3pa \cdot 4a - 6pa \cdot 2a - 6pa \cdot 3a = 0 \quad \text{(a)}$$

$$\Rightarrow V_A = 7pa \quad \text{(b)}$$

- *din* $\Sigma M_{Az}=0$ *(pentru tot sistemul)* $\Rightarrow$

$$-V_B \cdot 10a + pa^2 + pa \cdot 2a - 2pa \cdot 2a + pa \cdot 3a + 3pa \cdot 6a + 6pa \cdot 8a -$$

$$- 6pa \cdot 3a = 0 \quad \text{(c)}$$

$$\Rightarrow V_B = 5pa \quad \text{(d)}$$

Necunoscutele H_A şi H_B se determină prin aplicarea *teoremei echilibrului părţilor*, din ecuaţiile de momente faţă de C scrise pentru fiecare cadru.

- Ecuaţiile de echilibru pentru cadrul 1 :

$$\text{din } \Sigma M_C=0: \quad V_A \cdot 7a - H_A \cdot 5a + pa^2 - pa \cdot 3a - 2pa \cdot 9a - pa \cdot 4a - 3pa \cdot a = 0 \quad \text{(e)}$$

$$\Rightarrow H_A = 4{,}4pa \quad \text{(f)}$$

- Ecuaţiile de echilibru pentru cadrul 2 :

$$\text{din } \Sigma M_C=0 \Rightarrow -V_B \cdot 3a - H_B \cdot 5a + 6pa \cdot a + 6pa \cdot 2a = 0 \quad \text{(g)}$$

$$\Rightarrow H_B = 0{,}6\, pa \quad \text{(h)}$$

Necunoscutele H_C şi V_C se determină prin aplicarea principiului echilibrului părţilor: din ecuaţiile de proiecţii pe orizontală şi verticală pentru unul dintre cele două cadre (am folosit cadrul 2).

$$\text{din } \Sigma F_X=0 \Rightarrow -H_C - 6pa + H_B = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\Rightarrow H_C = 5{,}4\, pa \quad \text{(j)}$$

$$\text{din } \Sigma F_Y=0 \Rightarrow V_C + 5pa - 6pa = 0 \quad \text{(k)}$$

$$\Rightarrow V_C = 4\, pa \quad \text{(l)}$$

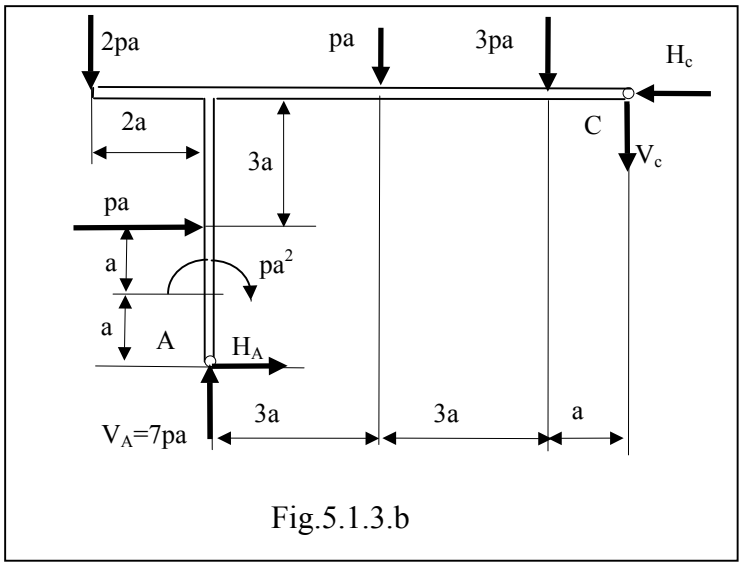


Fig.5.1.3.b

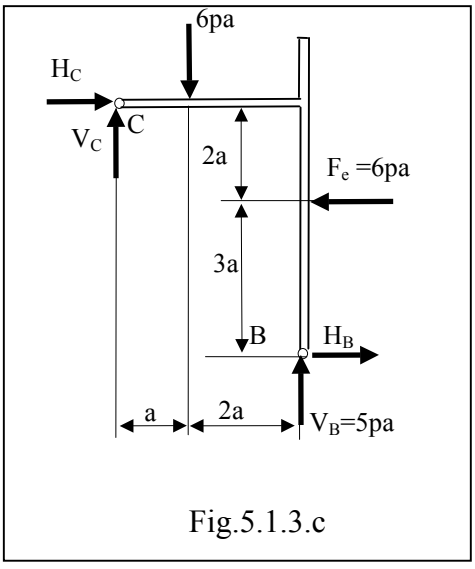


Fig.5.1.3.c

Ecuațiile de proiecții ale forțelor pentru întregul sistem şi pentru cadrul 1 servesc la verificarea rezultatelor.

- Ecuațiile de verificare se pot scrie pentru întreg sistemul:

$\Sigma F_X=0 \quad \Rightarrow H_A + H_B + pa - 6pa = 0$ (m)

$\Sigma F_y=0 \quad \Rightarrow V_A + V_B - 2pa - pa - 3pa - 6pa = 0$ (n)

- Sau numai pentru cadrul 1:

din $\Sigma F_X=0 \quad \Rightarrow H_A - H_C + pa = 0$ (o)

din $\Sigma F_y=0 \quad \Rightarrow V_A - V_C - 2pa - pa - 3pa = 0$ (p)

Generalizând rezolvarea acestui tip de problemă, se alege sistemul de referință cu originea în punctul C (O≡C, articulația dintre cele două cadre).

Pentru determinarea reacțiunilor H_A, V_A, H_B, V_B se scriu cele două ecuații de momente ale forțelor pentru fiecare din cele două părți față de punctul C: $\Sigma M_s=0$ şi $\Sigma M_d=0$ şi cele două ecuații de proiecții ale forțelor pentru întreg sistemul $\Sigma X_i=0$ şi $\Sigma Y_i=0$ obținându-se:

$$\begin{aligned} &V_A x_A - H_A y_A + N_s = 0; \\ &V_B x_B - H_B y_B + N_d = 0; \\ &H_A + H_B + X = 0; \\ &V_A + V_B + Y = 0 \end{aligned} \qquad \text{(q)}$$

unde am notat :

- N_s N_d suma momentelor forțelor exterioare care acționează asupra părții din stânga/dreapta : $N_s=\Sigma (x_i Y_{si} - y_i X_{si}) + M_{1s}$; $N_d=\Sigma (x_i Y_{di} - y_i X_{di}) + M_{1d}$;
- X,Y suma proiecțiilor forțelor exterioare pe axa Ox, Oy: $X=\Sigma X_i$; $Y=\Sigma Y_i$;
- X_i , Y_i proiecțiile forței exterioare $\overline{F}_i$ pe axele Ox respectiv Oy

Rezolvând acest sistem rezultă următoarele valori ale reacțiunilor:

$$\begin{aligned} H_A &= (N_S x_B + N_d x_A + X x_A y_B - Y x_A x_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ V_A &= (N_S y_B + N_d y_A + X y_A y_B - Y x_B y_A) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ H_B &= (-N_S x_B - N_d x_A - X x_B y_A + Y x_A x_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ V_B &= (-N_S y_B - N_d y_A - X y_A y_B + Y x_A y_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \end{aligned} \qquad \text{(r)}$$

Pentru calculul forțelor de legătură din articulația C se folosesc cele două ecuații de proiecții ale forțelor pentru partea dreaptă :

$H_C+H_B+X_d=0 \qquad V_C+V_B+Y_d=0$ unde:

- X_d suma proiecțiilor forțelor exterioare din dreapta pe axa Ox: $X_d=\Sigma X_{di}$;
- Y_d suma proiecțiilor forțelor exterioare din dreapta pe axa Oy: $Y_d=\Sigma Y_{di}$;

ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
x_A/a	y_A/a	x_B/a	y_B/a	x_{1s}/a	y_{1s}/a	X_{1s}/pa	Y_{1s}/pa	x_{2s}/a	y_{2s}/a	X_{2s}/pa	Y_{2s}/pa	x_{3s}/a	y_{3s}/a	X_{3s}/pa	Y_{3s}/pa	M_{1s}/pa^2
-6	-5	4	-5	-6	-3	3	0	-4	0	0	-8	0	0	0	0	-4

R	S	T	U	V	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
x_{1d}/a	y_{1d}/a	X_{1d}/pa	Y_{1d}/pa	x_{2d}/a	y_{2d}/a	X_{2d}/pa	Y_{2d}/pa	x_{3d}/a	y_{3d}/a	X_{3d}/pa	Y_{3d}/pa	M_{1d}/pa^2
2	0	0	-4	4	-1	-2	0	0	0	0	0	0

DATE DE IEŞIRE

AF	AG	AH	AI	AJ	AK
$X_s=\Sigma X_{is}/pa$	$Y_s=\Sigma Y_{is}/pa$	$X_d=\Sigma X_{id}/pa$	$Y_d=\Sigma Y_{id}/pa$	X	Y
G+K+O	H+L+P	T+Y+AC	U+Z+AD	AF+AH	AG+AI
3	-8	-2	-4	1	-12

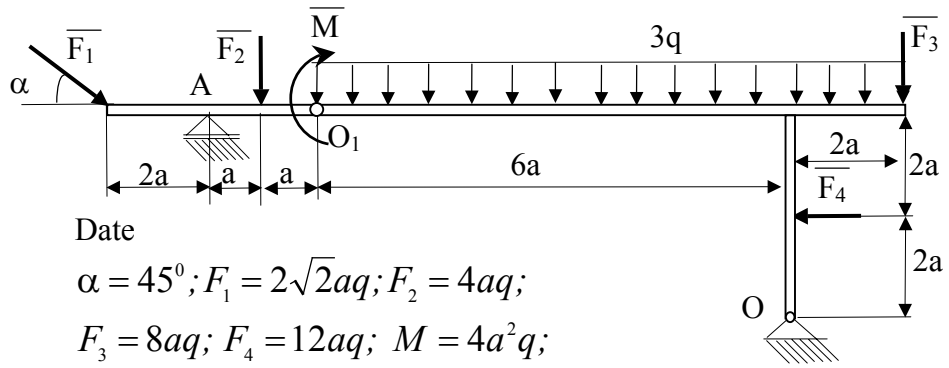
AL	AM	AN	AO	AP	AQ
$\Sigma X_{is}y_{is}/pa^2$	$\Sigma Y_{is}x_{is}/pa^2$	$\Sigma X_{id}y_{id}/pa^2$	$\Sigma Y_{id}x_{id}/pa^2$	N_s	N_d
F*G+J*K+N*O	E*H+I*L+M*P	S*T+X*Y+AB*AC	R*U+V*Z+AA*AD	AM - AL+Q	AO-AN+AE
-9	32	2	-8	37	-10

AR	AS	AT	AU	AV	AW
H_A	V_A	H_B	V_B	H_C	V_C
(AP*C+AQ*A+AJ*A*D -AK*A*C)/(B*C-A*D)	(AP*D+AQ*B+AJ*B*D -AK*B*C)/(B*C-A*D)	(-AP*C-AQ*A-AJ*B*C -AK*A*C)/(B*C-A*D)	(-AP*D-AQ*B+AJ*B*D -AK*A*D)/(B*C-A*D)	-AT-AH	-AU-AI
1	7	-2	5	4	-1

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *sistemele formate din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.4...5.1.5. Se cunosc: a, q, α, F_1, F_2, , F_4, M.*

Se cer *forţele de legătură din reazemul simplu A, articulaţia O_1 şi încastrarea O_2*



Date

$\alpha = 45^0; F_1 = 2\sqrt{2}aq; F_2 = 4aq;$

$F_3 = 8aq;\ F_4 = 12aq;\ M = 4a^2q;$

Fig.5.1.4

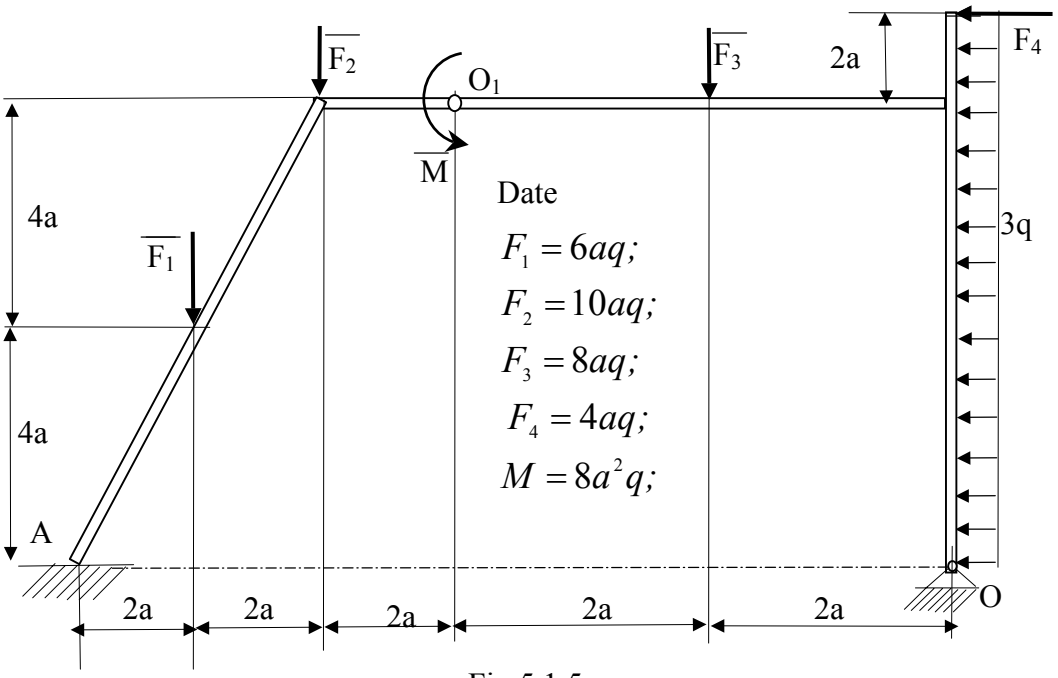


Fig.5.1.5

Date $F_1 = 8\sqrt{2}aq; F_2 = 4aq;$

$F_3 = 4aq;\ F_4 = 8aq;$

$M = 4a^2q;$

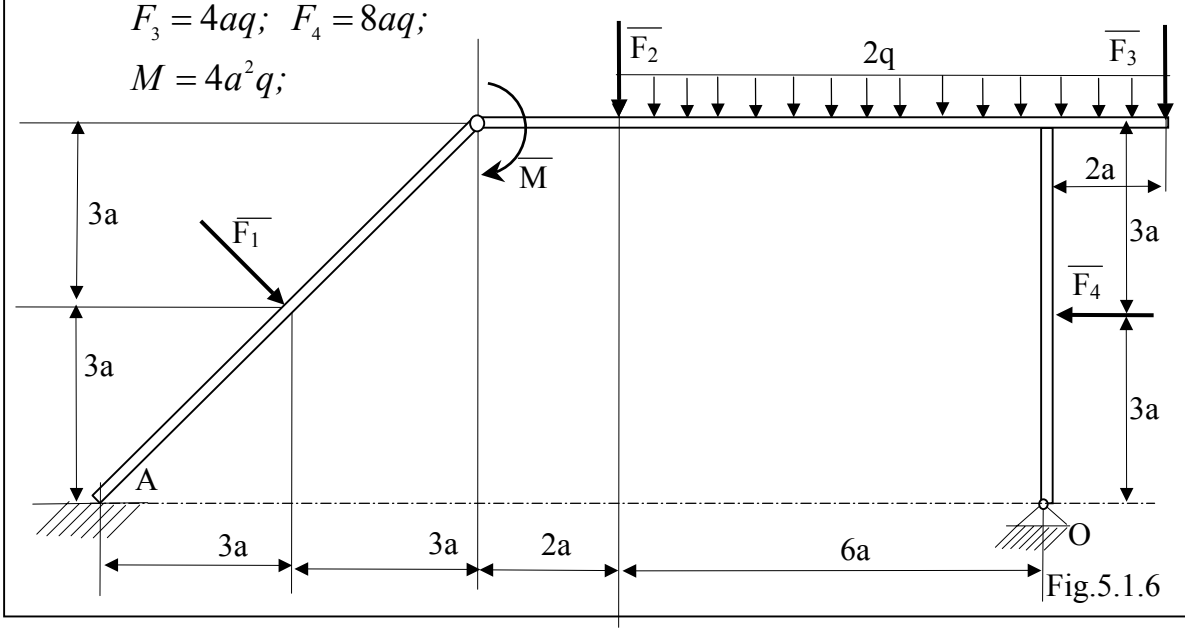


Fig.5.1.6

S5.2. ECHILIBRUL SISTEMELOR PLANE DE CORPURI CU FRÂNE (SABOT, TAMPON SAU BANDĂ)

PROBLEME REZOLVATE

5.2.1. Se consideră *sistemul de frânare cu sabot, format din patru corpuri: (1), (2), (3), (4) (fig. 5.2.1) sunt cunoscute: a, G, α, β, μ = 0 pe planul înclinat, μ≠0 pe sabot, corpul (3) de greutate neglijabilă.* ***Se cere:***

1) Ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp folosind metoda izolării.

2) Determinarea forței minime (P_{min}) pentru repaus.

3) Determinarea forțelor de legătură.

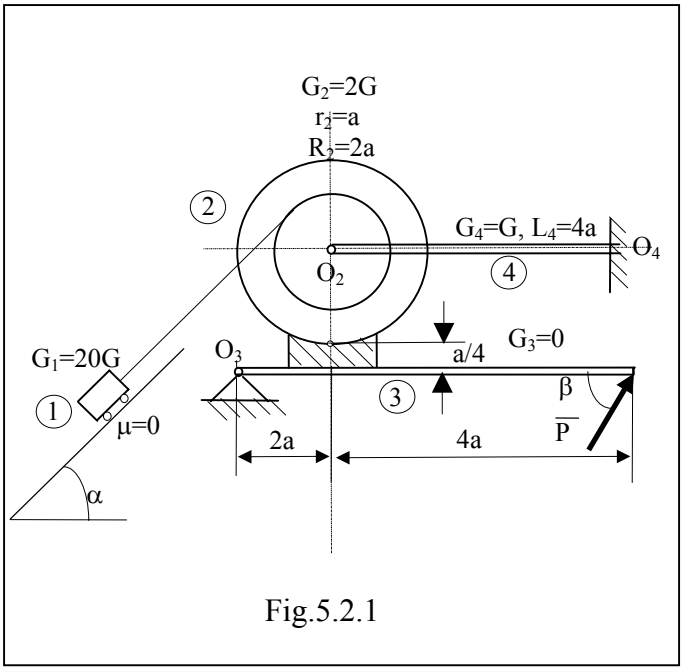
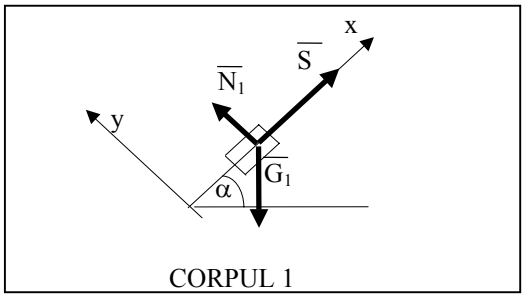
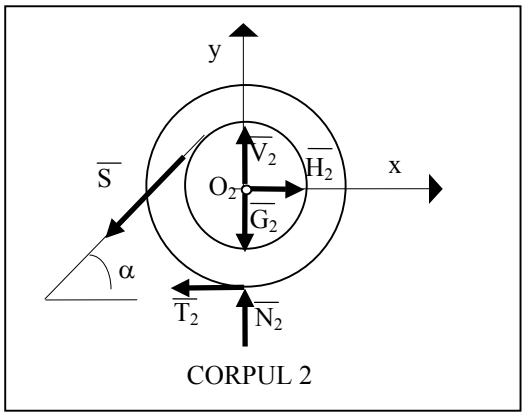


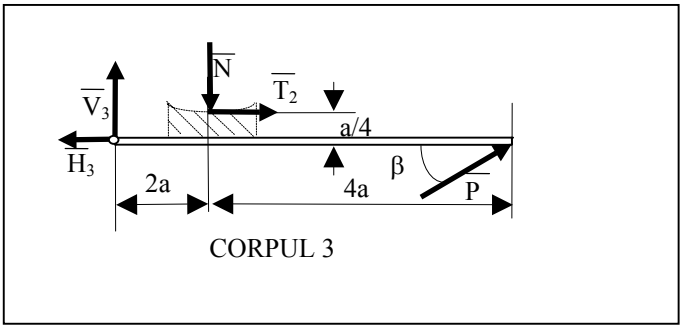
Fig.5.2.1



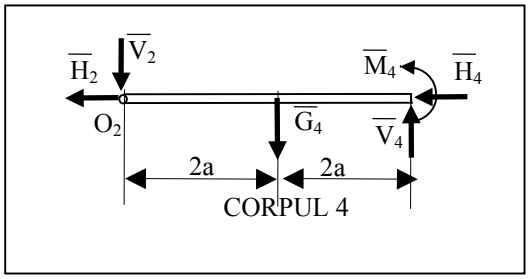
CORPUL 1



CORPUL 2



CORPUL 3



CORPUL 4

Rezolvare:

1) Se separă corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, ca în figura 5.2.1.

Relaţiile de echilibru pentru cele patru corpuri sunt următoarele:

Corpul 1:
$$\begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S - G_1 \sin\alpha = 0\\ N_1 - G_1 \cos\alpha = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S = 20G\sin\alpha\\ N_1 = 20G\cos\alpha\end{cases} \quad (a)$$

Corpul 2:
$$\begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\\ \Sigma M_{02} = 0\\ Conditia\ \ fizica\ \ la\ \ limita\\ echilibrului\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}H_2 - S\cos\alpha - T_2 = 0\\ V_2 - S\sin\alpha - G_2 + N_2 = 0\\ S\cdot a - T_2\cdot 2a = 0 \Rightarrow T_2 = \dfrac{S}{2} = 10G\sin\alpha\\ T_2 = \mu N_2 \qquad \Rightarrow N_2 = \dfrac{T_2}{\mu} = \dfrac{10G\sin\alpha}{\mu}\end{cases} \quad (b)$$

Corpul 3:
$$\begin{cases}\Sigma X_i = 0 \ \Rightarrow\ -H_3 + T_2 + P_m\cos\beta = 0\\ \Sigma Y_i = 0 \ \Rightarrow\ V_3 - N_2 + P_m\sin\beta = 0\\ \Sigma M_{03} = 0 \Rightarrow\ (P_m\sin\beta)\cdot 6a - N_2\cdot 2a - T_2\cdot\dfrac{a}{4} = 0\end{cases} \quad (c)$$

Corpul 4:
$$\begin{cases}\Sigma X_i = 0 \ \Rightarrow\ -H_2 + H_4 = 0\\ \Sigma Y_i = 0 \ \Rightarrow\ V_4 - V_2 - G_3 = 0\\ \Sigma M_{04} = 0 \Rightarrow\ M_4 - G_4\cdot 2a - V_2\cdot 4a = 0\end{cases} \quad (d)$$

Din ultima ecuaţie scrisă pentru corpul 3 avem:

$$P_m = \frac{1}{6\sin\beta}\left(2N_2 + \frac{T_2}{4}\right) = \frac{5G\sin\alpha}{12\mu\sin\beta}(8+\mu) \quad (e)$$

Înlocuind P_m şi forţele de legătură găsite *(S, T_2, N_2)* în celelalte ecuaţii, obţinem forţele de legătură: H_2, V_2, H_3, V_3, H_4, V_4, M_4 .

$$\begin{aligned}&H_2 = H_4 = 10G\sin\alpha(1+2\cos\alpha)\\ &V_2 = V_4 = G\left(20\sin^2\alpha + 2 + \frac{10\sin\alpha}{\mu}\right)\\ &H_3 = 10G\sin\alpha + P_m\cos\beta\\ &V_3 = \frac{10G\sin\alpha}{\mu} - P_m\sin\beta\\ &M_4 = 2Ga\left(40\sin^2\alpha + 5 + \frac{20\sin\alpha}{\mu}\right)\end{aligned} \quad (f)$$

5.2.2 Se considră *sistemul de frânare cu sabot format din patru corpuri, ca în fig.5.2.2, pentru care se cunosc a, G, α, β.* ***Se cer:***
1) scrierea relaţiilor de echilibru pentru fiecare corp (după separarea lor)
2) Determinarea forţei minime de frânare (P_{min}).
3) Determinarea forţelor de legătură.

Rezolvare:

1) Se separă corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forţe.

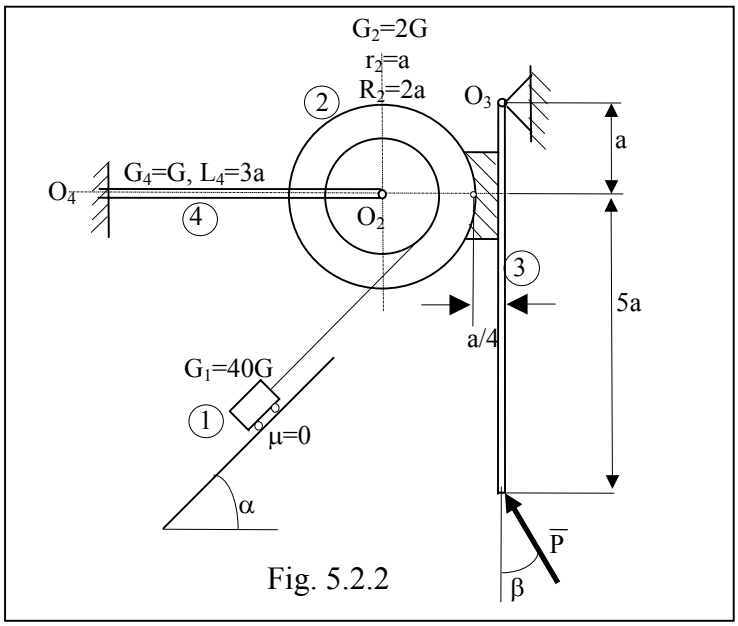
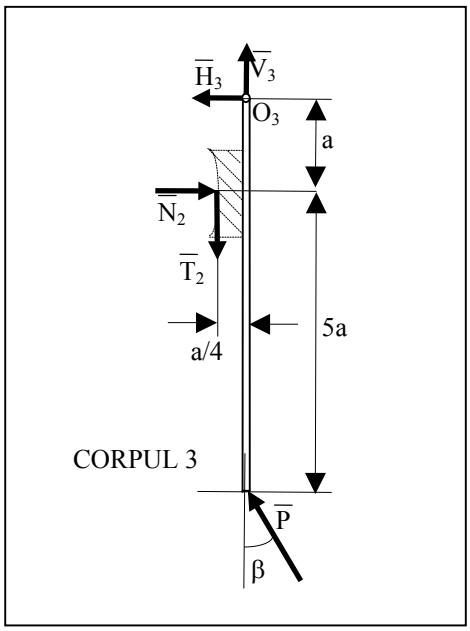
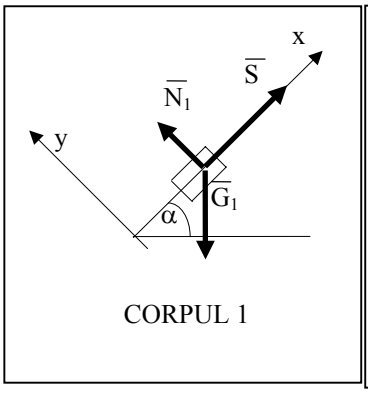
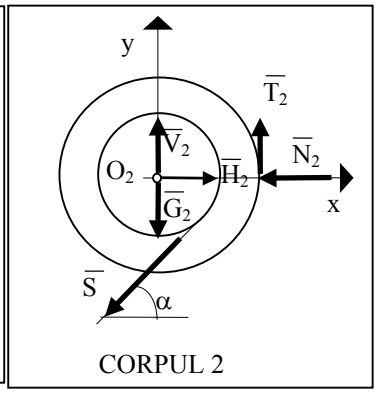
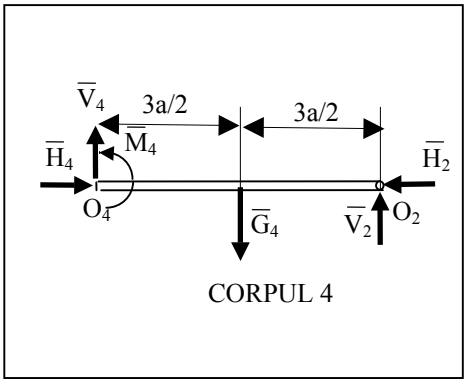


Fig. 5.2.2









Ecuaţiile de echilibru pentru fiecare corp sunt:

Corpul 1: $$\begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\end{cases}\quad\begin{cases}S_1 - G_1 \sin\alpha = 0\\ N_1 - G_1 \cos\alpha = 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S = 40G\sin\alpha\\ N_1 = 40G\cos\alpha\end{cases}\qquad (a)$$

Corpul 2: $$\begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\\ \Sigma M_{02} = 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H_2 - S\cos\alpha - N_2 = 0\\ V_2 - S\sin\alpha - G_2 + T_2 = 0\\ S\cdot a - T_2\cdot 2a = 0 \Rightarrow T_2 = \dfrac{S}{2} = 20G\sin\alpha\\ T_2 = \mu N_2 (la\ \ lim ita) \Rightarrow N_2 = \dfrac{T_2}{\mu} = \dfrac{20G\sin\alpha}{\mu}\end{cases}\qquad (b)$$

$$\text{Corpul 3:}\quad \begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\\ \Sigma M_{03} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}V_3 - T_2 + P_m \cos\beta = 0\\ -H_3 + N_2 - P_m \sin\beta = 0\\ (P_m \sin\beta)\cdot 5a - N_2 \cdot a - T_2 \dfrac{a}{4} = 0\end{cases} \tag{c}$$

$$\text{Corpul 4 :}\quad \begin{cases}\Sigma X_i = 0\\ \Sigma Y_i = 0\\ \Sigma M_{04} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}H_4 - H_2 = 0\\ V_4 - G_4 - V_2 = 0\\ M_4 - G_4 \cdot \dfrac{3a}{2} - V_2 \cdot 3a = 0\end{cases} \tag{d}$$

Din ultima ecuație scrisă pentru corpul 3 rezultă:

$$P_m = \frac{G \sin\alpha}{\mu \sin\beta}(4+\mu) \tag{e}$$

Înlocuind rezultatele *(S, T_2 , N_2 ,P_m)* în celelalte ecuații, rezultă:

$$H_2 = H_4 = 20G\sin\alpha(2\cos\alpha - \frac{1}{\mu}) \qquad H_3 = \frac{G\sin\alpha}{\mu}(16-\mu)$$
$$V_2 = 2G(20\sin^2\alpha - 10\sin\alpha + 1) \qquad V_3 = G\sin\alpha(\frac{4+\mu}{\mu}ctg\beta - 20) \tag{f}$$
$$V_4 = G(40\sin^2\alpha - 20\sin\alpha + 3) \qquad M_4 = \frac{3aG}{2}(-80\sin^2\alpha + 40\sin\alpha - 3)$$

5.2.5 Se consideră *sistemul de frânare cu bandă din fig. 5.2.5*

Se cunosc valorile pentru: G, a, b, r, R şi μ – coeficientul de frecare a curelei pe disc; se neglijează greutăţile discului 1 şi ale pârghiei 2.

Se cere *valoarea forţei minime $F_{min.}$ pentru frânare.*

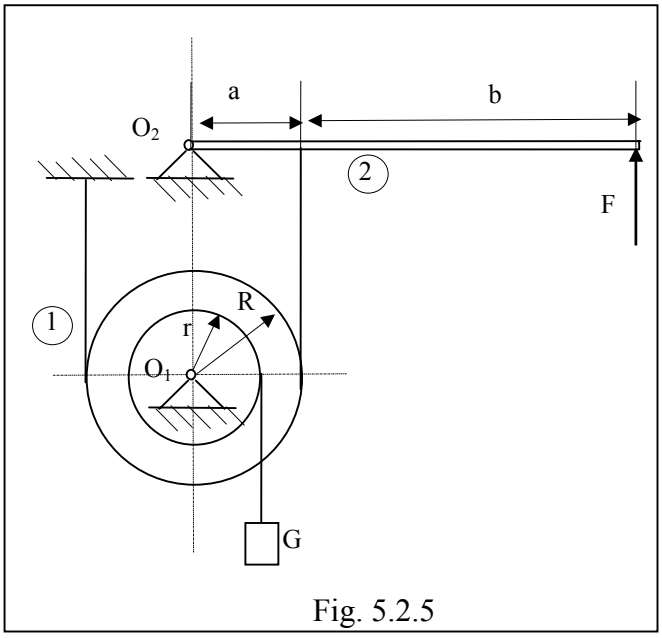
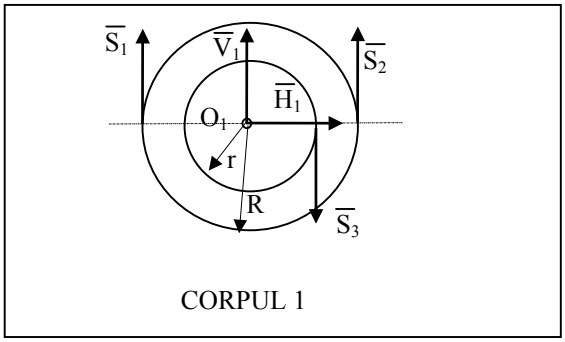
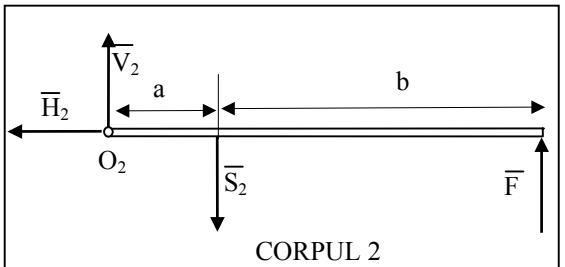


Fig. 5.2.5



CORPUL 1



CORPUL 2

Rezolvare:

Se separă corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, apoi se scriu ecuațiile de echilibru (ținând seama că tensiunea din fir $S_3=G$):

Corpul 1: $\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow T_2 \cdot R + G \cdot r - S_1 \cdot R = 0$ (a)

Legea fizică a frecării (relația Euler) $S_2 \le S_1 e^{\mu\pi}$ (b)

Corpul 2: $\Sigma M_{02} = 0 \Rightarrow F(a+b) - S_2 \cdot a = 0$ (c)

Înlocuind pe S_2 din (c) în relațiile (a) şi (b) şi apoi pe S_1 în (a) se obține:

$$S_2 = \frac{a+b}{a} F \tag{d}$$

respectiv:

$$F \ge \frac{a}{a+b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi}-1} G$$
$$F_{min} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi}-1} G \tag{e}$$

5.2.6. Se consideră *sistemul de frânare cu bandă (varianta b) din fig. 5.2.6. Se cunosc: G, a, b, r, R şi μ – coeficientul de frecare al curelei pe disc. Se neglijează greutățile discului şi ale pârghiei.*

Se cere *valoarea forței minime $F_{min.}$ pentru frânare.*

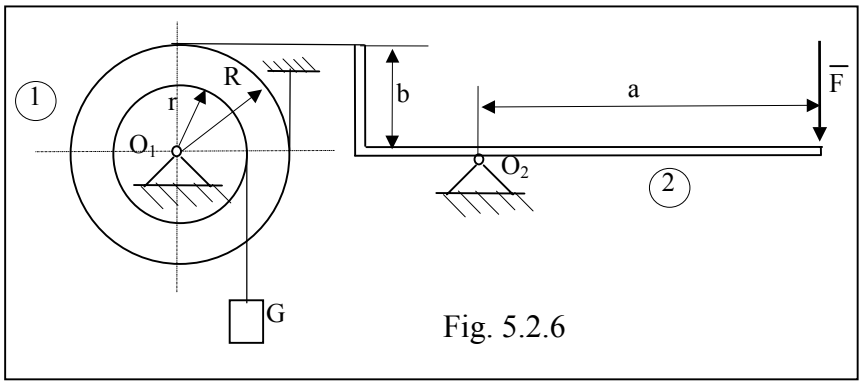
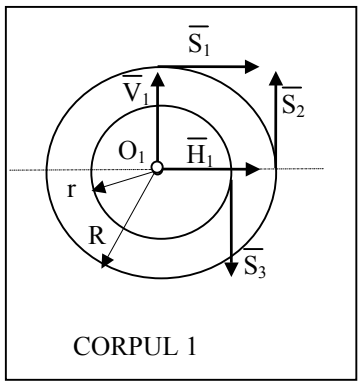
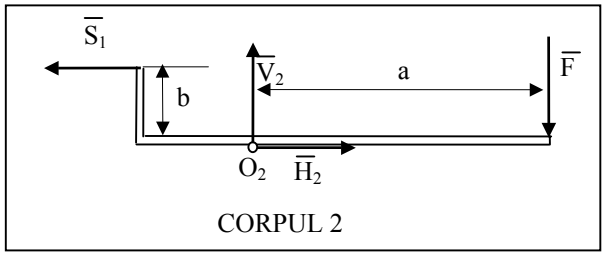


Fig. 5.2.6



CORPUL 1



CORPUL 2

Rezolvare:

Se separă corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, apoi se scriu ecuațiile de echilibru (ținând seama că tensiunea din fir $S_3=G$):

Corpul 1:

$$\Sigma M_{01} = 0 \quad \Rightarrow S_1 \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0$$
$$(Relatia\ lui\ \ Euler) \quad \Rightarrow S_2 \le S_1 e^{\frac{3\pi}{4}\mu} \tag{a}$$

Corpul 2: $$\Sigma M_{02} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot b - F \cdot a = 0 \tag{b}$$

Înlocuind în prima şi a doua ecuaţie S_1 determinat din a treia, se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} F \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0 \Rightarrow S_2 = \dfrac{a}{b} F + \dfrac{r}{R} G \\ S_2 \le \dfrac{a}{b} F \cdot e^{\frac{3\pi}{4}\mu} \end{cases} \tag{c}$$

Înlocuind se obţine:

$$F \ge \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1} \qquad sau: \quad F_{min} = \frac{rb}{Ra} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1} \tag{d}$$

5.2.7. Se consideră *frâna cu tampon din fig. 5.2.7 . Se cunosc valorile pentru: G, a, α, β, b şi coeficientul de frecare μ pe tampon.* ***Se cere:***

1) Să se separe corpurile şi să se scrie ecuaţiile de echilibru;

2) *Să se determine forţa minimă P_{min} pentru frânare.*

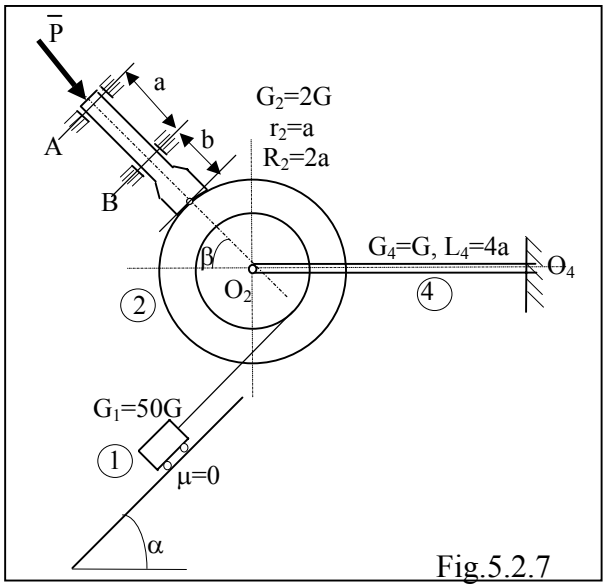
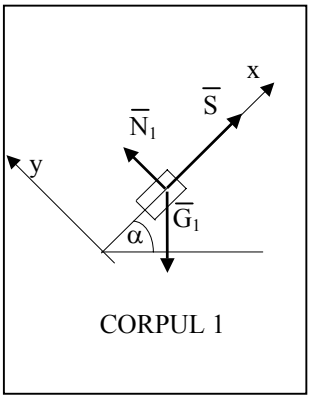
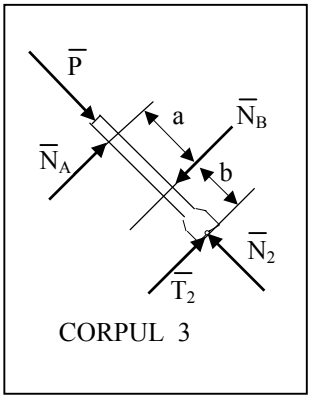


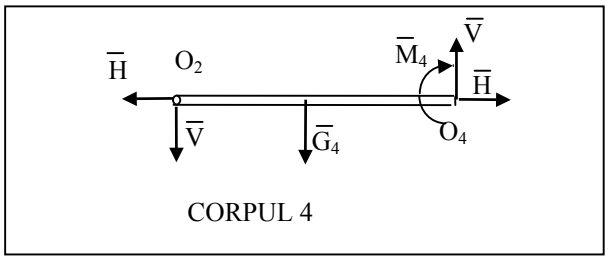
Fig.5.2.7



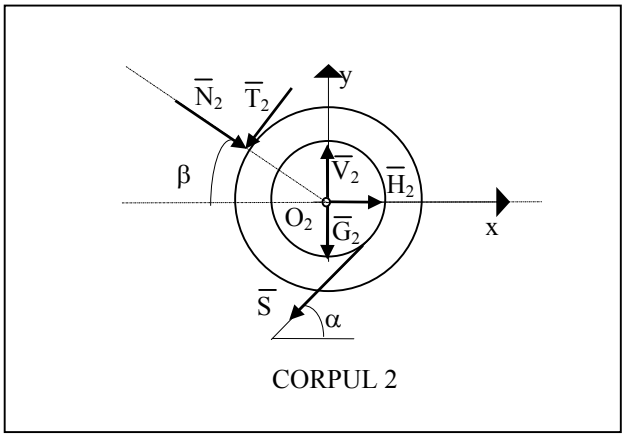
CORPUL 1



CORPUL 3



CORPUL 4



CORPUL 2

Rezolvare:

Ecuațile de echilibru pentru fiecare din cele patru corpuri izolate, sunt:

Corpul 1:
$$\begin{cases} -G_1 \sin\alpha + S = 0 \\ -G_1 \cos\alpha + N_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 50G\sin\alpha \\ N_1 = 50G\cos\alpha \end{cases} \quad (a)$$

Corpul 2:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow\; H_2 - S\cos\alpha - T_2 \sin\beta + N_2 \cos\beta = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow\; V_2 - G_2 - S\sin\alpha - T_2 \cos\beta - N_2 \sin\beta = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0 \;\Rightarrow\; T_2 \cdot 2a - S \cdot a = 0 \Rightarrow T_2 = \dfrac{S}{2} = 25G\sin\alpha \\ T_2 = \mu N_2 (la \;\; lim ita) \qquad \Rightarrow N_2 = \dfrac{T_2}{\mu} = \dfrac{25G\sin\alpha}{\mu} \end{cases} \quad (b)$$

Corpul 3:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow P_m - N_2 = 0 \;\Rightarrow P_m = N_2 = \dfrac{25G\sin\alpha}{\mu} \\ \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow N_A - N_B + T_2 = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow T_2 \cdot (a+b) - N_B \cdot a = 0 \Rightarrow N_B = \dfrac{25G\sin\alpha(a+b)}{a} \end{cases} \quad (c)$$

Corpul 4:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow -H_2 + H_4 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow -V_2 - G_4 + V_4 = 0 \\ \Sigma M_{04} = 0 \;\Rightarrow M_4 - G_4 \cdot 2a - V_2 \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Înlocuind mărimile găsite *(S, T_2 , P_m , N_B)* în ecuațiile nefolosite se obțin celelalte forțe de legătură *(H_2 , V_2 , N_A , H_4 , V_4 , M_4)*.

$$H_2 = 25G\left(\sin 2\alpha + \sin\beta\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\mu}\right)$$

$$V_2 = 2G + 25G\left[2\sin^2\alpha + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\sin\alpha\sin\beta\right] \quad (e)$$

$$N_A = \frac{25bG\sin\alpha}{a}$$

$$H_4 = 25G(\sin 2\alpha + \sin\beta\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\mu})$$

$$V_4 = 3G + 25G\left[2\sin^2\alpha + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\sin\alpha\sin\beta\right]$$

$$N_A = 2G + 100G\left(\sin 2\alpha + \sin\beta\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\mu}\right)$$

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *sistemul de frânare cu sabot, format din patru corpuri: (1), (2), (3), (4) (fig. 5.2.8 ... 5.2.10) sunt cunoscute: a, G, α, β, μ = 0 pe planul înclinat, μ≠0 pe sabot, corpul (3) de greutate neglijabilă.* ***Se cer:***

1) Ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp folosind metoda izolării.

2) Determinarea forței minime (P_{min}) pentru repaus.

3) Determinarea forțelor de legătură.

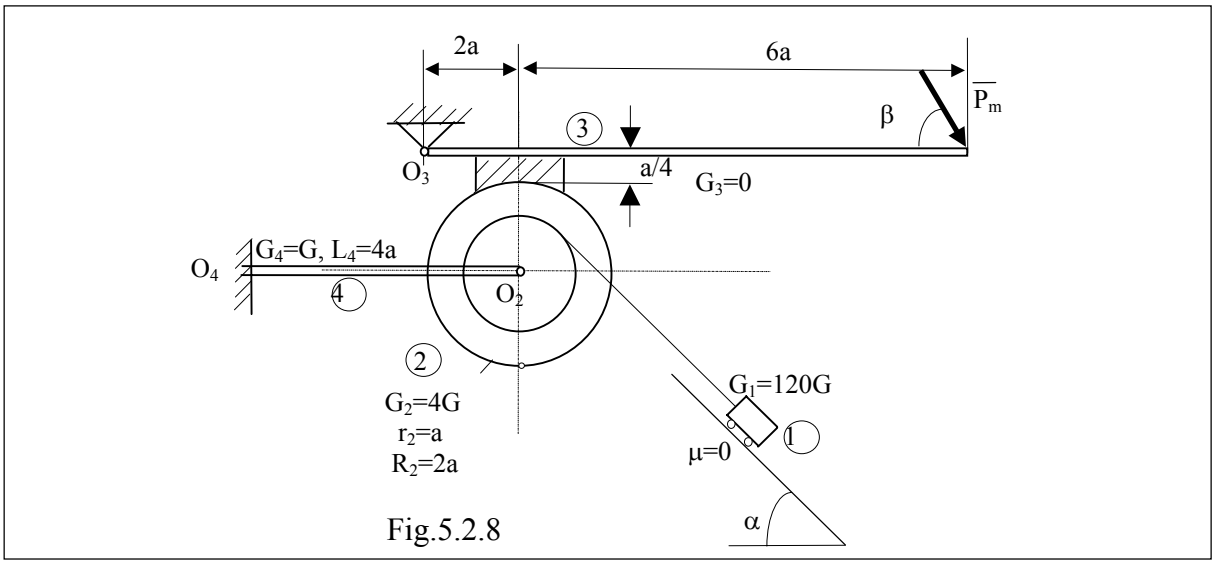


Fig.5.2.8

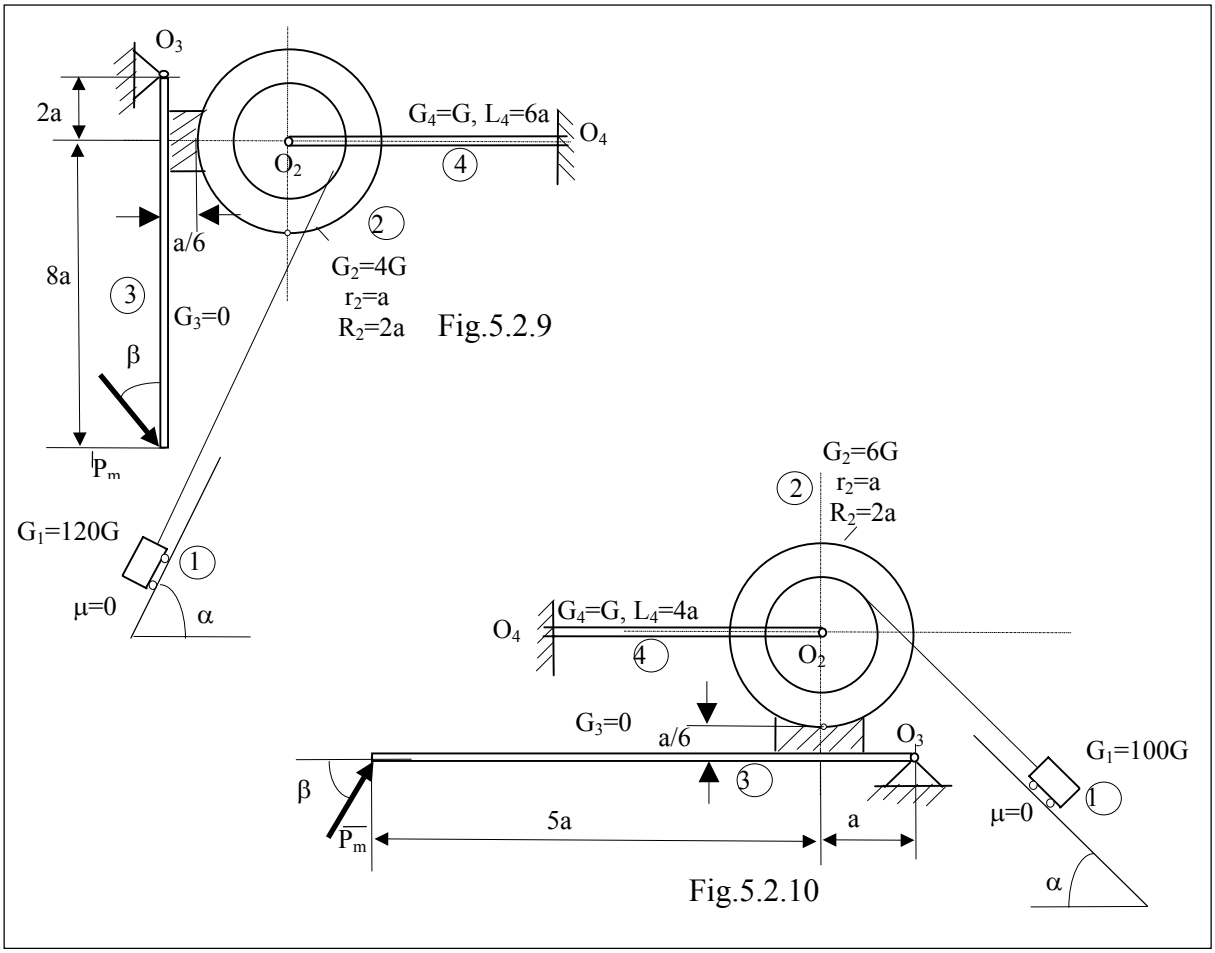


Fig.5.2.9

Fig.5.2.10

CAPITOLUL VI
SISTEME DE BARE ARTICULATE
(GRINZI CU ZĂBRELE)

REZUMAT DE TEORIE

Pentru determinarea eforturilor axiale din barele unui sistem de bare articulate static determinat (grinzi cu zăbrele) se folosesc frecvent două metode analitice: metoda izolării nodurilor şi metoda secţiunilor (RITTER).

Mai întâi se verifică dacă sistemul de bare articulate este static determinat: dacă se notează cu *n* numărul de noduri şi cu *b* numărul de bare articulate ale sistemului trebuie să fie îndeplinită următoarele condiţii: *b=2n-3* pentru sistemele plane şi *b=3n-6* pentru sistemele spaţiale.

Mai întâi se determină forţele de legătură ale sistemului cu mediul fix, scriinduse ecuaţiile de echilibrul forţelor corespunzătoare teoremei solidificării, după care se trece la rezolvarea propriu-zisă prin una din cele două metode:

a. Metoda izolării nodurilor

Această metodă se bazează pe *metoda izolării corpurilor sau pe teorema echilibrului părţilor* de la echilibrul sistemelor , considerând ca o "parte" a sistemului de bare câte un nod , care fiind izolat poate fi considerat ca un punct material acţionat de forţe concentrate în acel nod. Aceste forţe sunt forţe interioare (eforturile din bare) sau forţele exterioare aplicate în noduri (forţele date şi forţele de legătură cu mediul fix).

Se scriu ecuaţiile de echilibru ale acestor forţe pentru fiecare nod al sistemului, sub forma proiecţiilor pe cele două /trei axe ale sistemului ales în plan/spaţiu. În final dacă sistemul este static determinat numărul total de relaţii independente obţinute este egal cu numărul total de necunoscute (reacţiuni +eforturi din bare) deci se poate rezolva analitic.

Se utilizează în cadrul acestei metode următoarea convenţie: toate eforturile din bare se consideră iniţial că sunt pozitive (de întindere) deci sensul lor este acela că ies din nod. Dacă din calcule (după rezolvarea sistemului de ecuaţii) rezultă pentru aceste eforturi valori negative, atunci ele sunt în realitate eforturi de compresiune.

b. Metoda secţiunilor (RITTER)

Această metodă se bazează tot *pe teorema echilibrului părţilor* şi se utilizează atunci când interesează efortul dintr-o anumită bară (sau un număr redus de bare). Pentru aceasta se procedează în felul următor:

- se secționează sistemul de bare articulate cu un plan imaginar astfel încât să fie secționată şi bara al cărei efort ne interesează şi se introduc în secțiunile corespunzătoare ale barelor eforturile necunoscute notate cu S_{ij}, unde i,j sunt nodurile care definesc bara; caşi în cazul metodei izolării nodurilor se consideră inițial că acestea sunt pozitive (ies din secțiune);
- conform teoremei ecilibrului părților, forțele care acționează asupra fiecărei "părți" obținute în urma secționării cu planul imaginar se află în echilibru deci eforturile din barele secționate reprezintă de fapt forțele interioare de acțiune reciprocă a celor două părți;
- pentru determinarea unui efort necunoscut (de exemplu în cazul unui sistem plan de bare articulate) se scrie ecuația de momente față de punctul de intersecție (nodul) al suporturilor celorlalte două eforturi necunoscute. Dacă cele două eforturi care nu interesează sunt paralele atunci pentru determinarea celui de-al treilea effort necunoscut se foloseşte ecuația de proiecții a forțelor după direcția perpendiculară la cele două eforturi.

6.1. GRINZI CU ZĂBRELE

PROBLEME REZOLVATE

6.1. Se consideră *grinda cu zăbrele din fig. 6.1.a*

Se cunosc: $a,\ \alpha=\dfrac{\pi}{4},\ F_1=5\sqrt{2}F,\ F_2=10F,\ F_3=10F,\ F_4=20F$

Se cer: *1) Reacțiunile în reazemul simplu (1) şi articulația (12)*
2) Eforturile din nodurile (1), (2), (3)
3) Eforturile din barele: 6–8, 7–8, 7–9

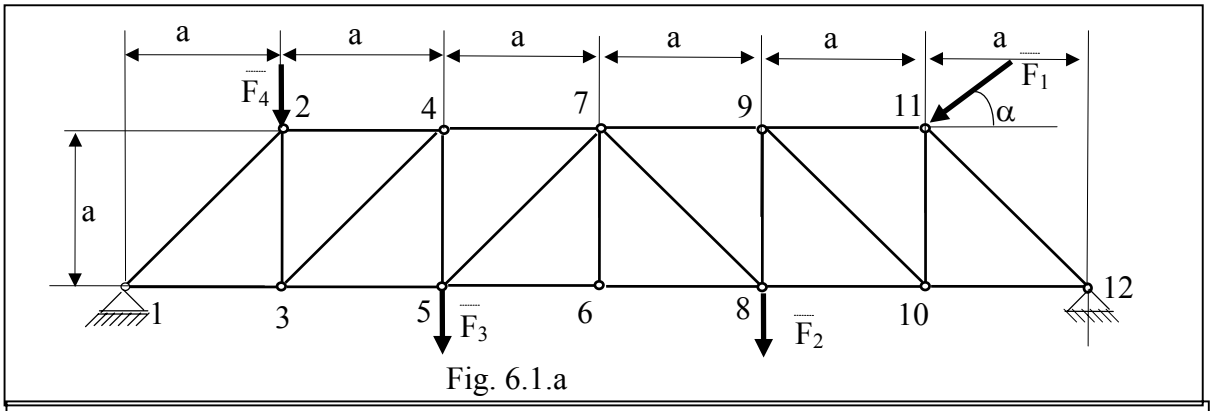
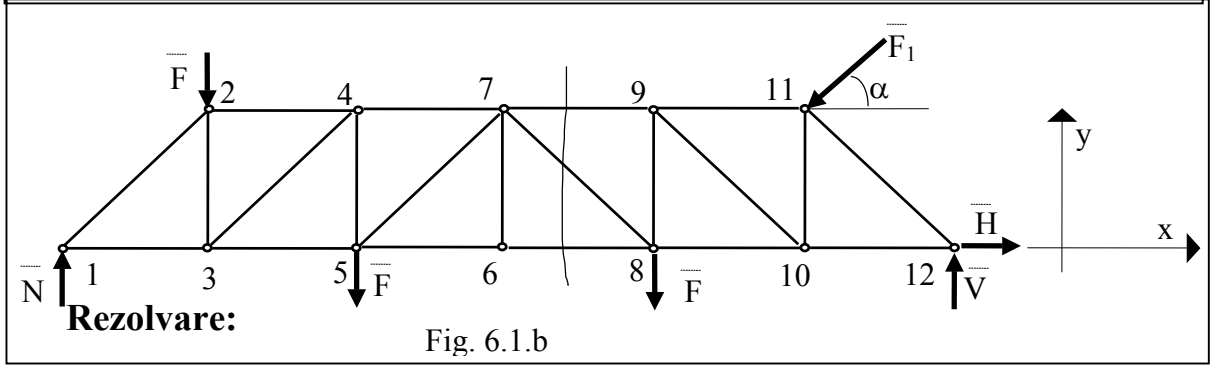


Fig. 6.1.a



Rezolvare:

Fig. 6.1.b

1. Se înlocuiesc legăturile 1 şi 12 cu forţe de legătură şi se scriu ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de bare articulate:

$$\Sigma X_i = 0 \quad \Rightarrow H - F_1 \cos\alpha = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0 \quad \Rightarrow N + V - F_1 \sin\alpha - F_2 - F_3 - F_4 = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$\Sigma M_{12} = 0 \Rightarrow N \cdot 6a - F_4 \cdot 5a - F_3 \cdot 4a - F_2 \cdot 2a - (F_1 \sin\alpha) \cdot a - (F_1 \cos\alpha)a = 0$$

Înlocuind cu valorile cunoscute se obţine:

$$H = 5F, \qquad N = \frac{85}{3}F, \qquad V = \frac{50}{3}F \qquad \text{(b)}$$

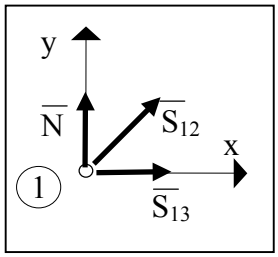
Pentru verificare se scrie relaţia de moment faţă de 1:

$$\Sigma M_1 = 0: V \cdot 6a - (F_1 \sin\alpha) \cdot 5a + (F_1 \cos\alpha)a - F_2 \cdot 4a - F_3 \cdot 2a - F_4 \cdot a = 0 \qquad \text{(c)}$$

2. Se izolează nodurile în ordinea: (1), (2), (3) şi se scriu ecuaţiile de echilibru pentru fiecare:

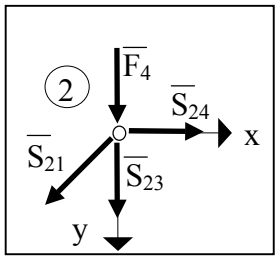
Nodul 1:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{13} + S_{12}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N + S_{12}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{13} = \dfrac{85}{3}F \\ S_{12} = -\dfrac{85\sqrt{2}}{3}F \end{cases} \qquad \text{(d)}$$



Nodul 2:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{24} - S_{21}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow -F_4 - S_{23} - S_{21}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{24} = -\dfrac{85}{3}F \\ S_{23} = \dfrac{25}{3}F \end{cases} \qquad \text{(e)}$$



Nodul 3:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow -S_{31} + S_{35} + S_{34}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow \quad S_{32} + S_{34}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{35} = \dfrac{110}{3}F \\ S_{34} = -\dfrac{25\sqrt{2}}{3}F \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

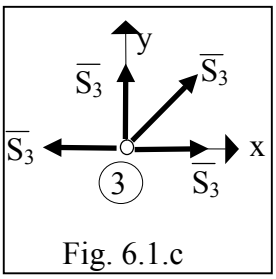


Fig. 6.1.c

Pentru determinarea eforturilor din barele 6-8, 7-8, 7-9 se aplică metoda secţiunilor scrind ecuaţiile de momente sau de proiecţie pentru forţele corespunzătoare părţii din stânga secţiunii imaginare considerate (fig.6.1.d.).

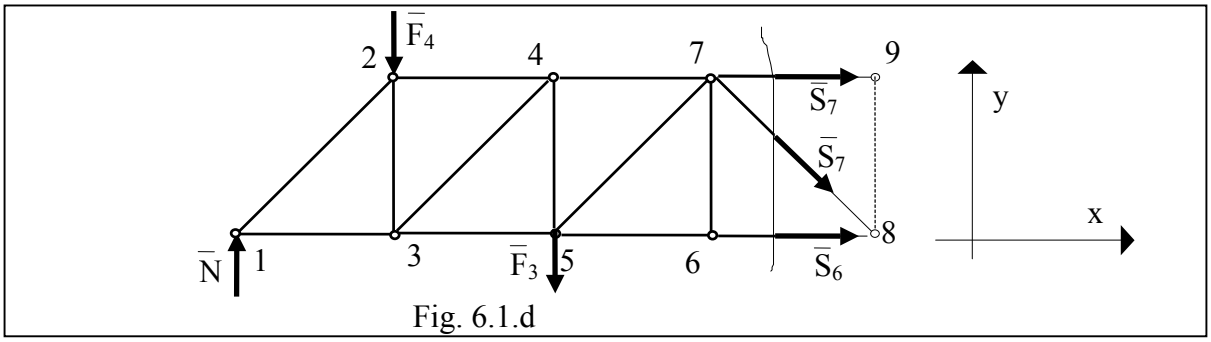


Fig. 6.1.d

Suma momentelor forțelor față de nodurile 7 şi 8 şi suma proiecțiilor pe verticală a forțelor corespunzătoare pentru această parte, se scrie astfel:

$$\Sigma M_7 = 0 \Rightarrow S_{68} \cdot a + F_3 \cdot a + F_4 \cdot 2a - N \cdot 3a = 0 \;\Rightarrow S_{68} = 35F$$

$$\Sigma M_8 = 0 \Rightarrow S_{79} \cdot a - F_3 \cdot 2a - F_4 \cdot 3a + N \cdot 4a = 0 \;\Rightarrow S_{79} = -\frac{100}{3}F \qquad \text{(g)}$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N - F_4 - F_3 - S_{78} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow S_{78} = -\frac{5\sqrt{2}}{3}F \qquad \text{(h)}$$

6.2. Se consideră *grinda cu zăbrele din fig. S6.2.a*

Se cunosc: a, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $F_1 = 10\sqrt{2}F$, $F_2 = F_3 = F_4 = 20F$. ***Se cer:***

1) Reacțiunile din reazemul simplu (2) şi articulația (12);
2) Eforturile în nodurile (1), (2), (3);
3) Eforturile în barele: 6–8, 7–8, 7–9.

Rezolvare:

1) Se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură şi se scriu ecuațiile de echilibru pentru întregul sistemul de bare articulate.

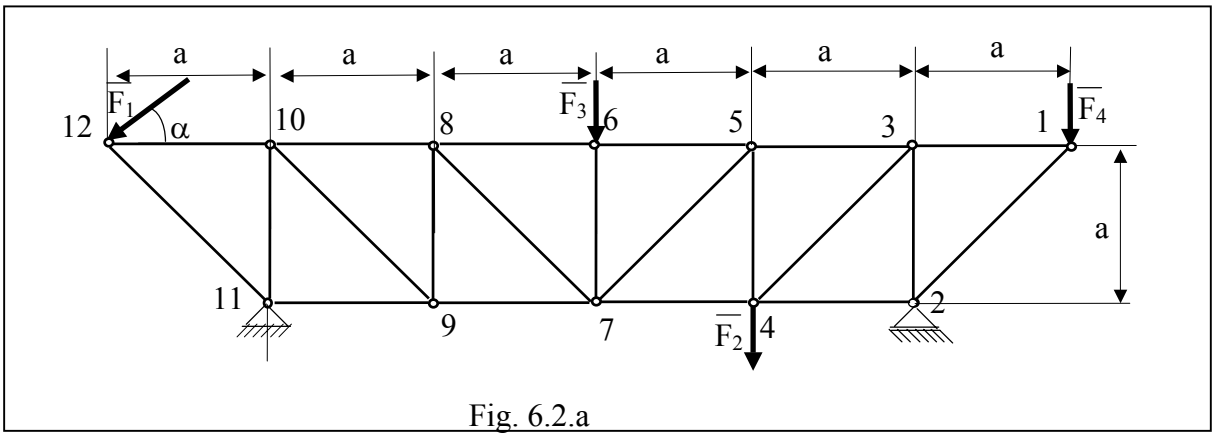


Fig. 6.2.a

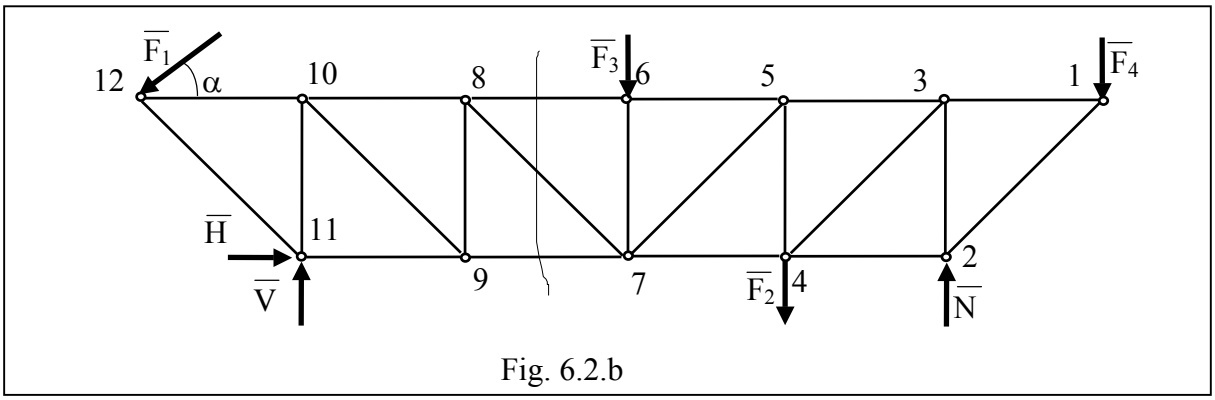


Fig. 6.2.b

$$\Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow H - F_1 \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow V + N - F_1 \sin\alpha - F_3 - F_2 - F_4 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma M_{12} = 0 \Rightarrow N \cdot 4a - F_4 \cdot 5a - F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 2a + (F_1 \cos\alpha)a + (F_1 \sin\alpha)a = 0$$

Ecuația de momente față de (2) este o ecuație de verificare:

$$\Sigma M_2 = 0: V \cdot 4a - (F_1 \cos\alpha)a - (F_1 \sin\alpha)5a - F_3 \cdot 2a - F_2 \cdot a + F_4 \cdot a = 0 \qquad \text{(b)}$$

Înlocuind valorile cunoscute se obține:

$$H = 10F, \quad V = 25F, \quad N = 45F. \qquad \text{(c)}$$

2) Folosind metoda izolării nodurilor pentru nodurile (1), (2) şi (3) avem:

Nodul 1:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{13} + S_{12}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{13} = 20F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{12}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0 \Rightarrow S_{12} = -20\sqrt{2}F \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Nodul 2:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{21}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - S_{24} = 0 \Rightarrow S_{24} = -20F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{21}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + S_{23} + N = 0 \Rightarrow S_{23} = -25F \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Nodul 3:
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{35} - S_{31} + S_{34}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{35} = -5F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{32} + S_{34}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{34} = 25\sqrt{2}F \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

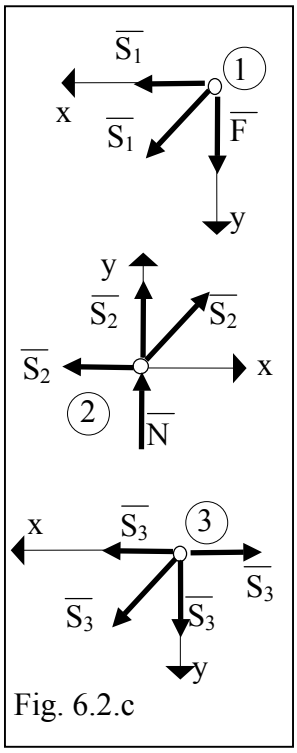


Fig. 6.2.c

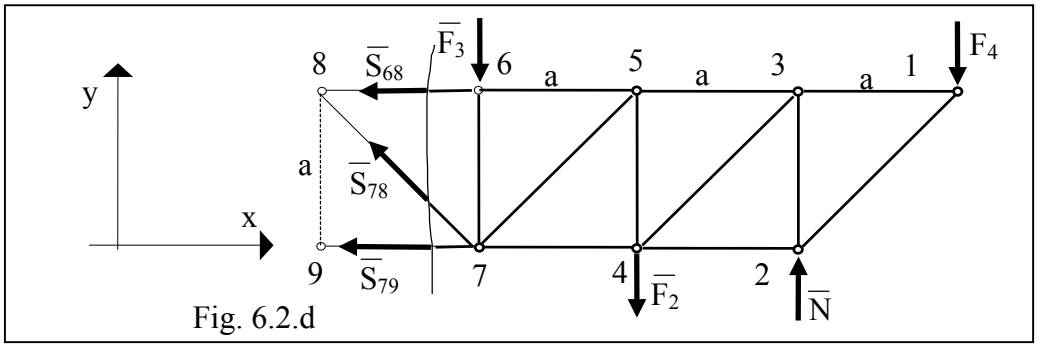


Fig. 6.2.d

3) Se aplică metoda secțiunilor, scriind două ecuații de momente față de nodurile 7 şi 8 şi o ecuație de proiecții pe verticală, pentru forțele corespunzătoare părții din dreapta:

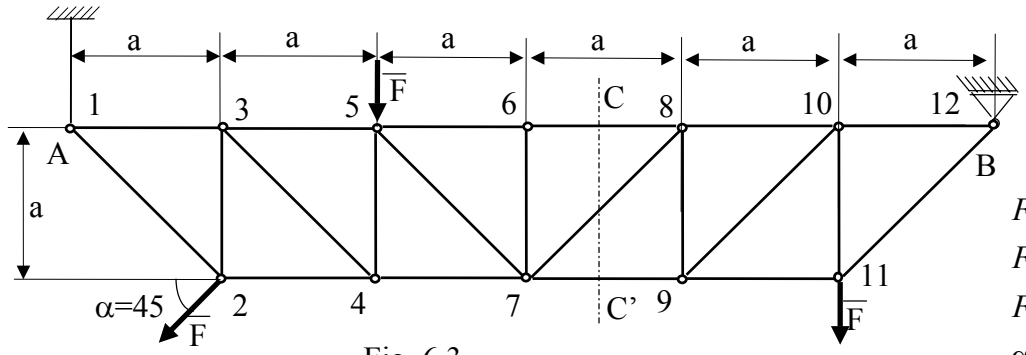
$$\begin{cases} \Sigma M_7 = 0 \Rightarrow S_{68} \cdot a - F_2 \cdot a + N \cdot 2a - F_4 \cdot 3a = 0 & \Rightarrow S_{68} = -5F \\ \Sigma M_8 = 0 \Rightarrow S_{79} \cdot a + F_3 \cdot a + F_2 \cdot 2a - N \cdot 3a + F_4 \cdot 4a = 0 & \Rightarrow S_{79} = -5F \\ S_{78} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - F_3 - F_2 + N - F_4 = 0 & \Rightarrow S_{78} = 15\sqrt{2}F \end{cases} \qquad \text{(g)}$$

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *grinzile cu zăbrele din fig. 6.3...6.6*

Se cunosc: a, α, F_1, F_2, F_3, F_4. ***Se cer:***

1) *Reacţiunile în reazemul simplu (sau firul) (A) şi articulaţia (B)*
2) *Eforturile din nodurile (1), (2), (3) folosind metoda izolării nodurilor*
3) *Eforturile din barele intersectate de planul CC' folosind metoda secţiunilor.*



Date

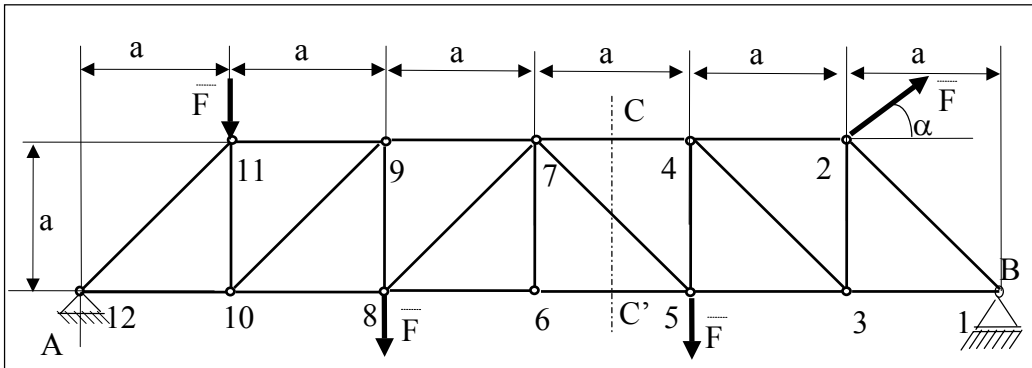
$F_1 = 2\sqrt{2}F;$

$F_2 = 4F;$

$F_3 = 6F;$

$\alpha = \pi / 4;$

Fig. 6.3



Date

$F_1 = 4\sqrt{2}F;$

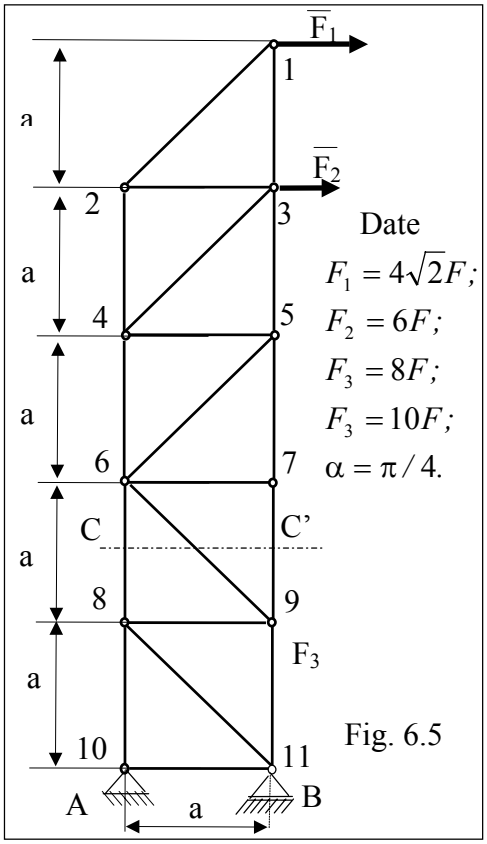
$F_2 = 6F;$

$F_3 = 8F;$

$F_3 = 10F;$

$\alpha = \pi / 4.$

Fig. 6.4



Date

$F_1 = 4\sqrt{2}F;$

$F_2 = 6F;$

$F_3 = 8F;$

$F_3 = 10F;$

$\alpha = \pi / 4.$

Fig. 6.5

Date

$F_1 = 4F;$ $F_2 = 8F;$

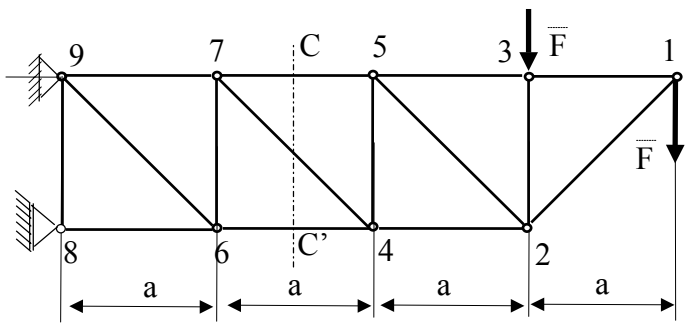


Fig. 6.6

CAPITOLUL VII
STATICA FIRULUI OMOGEN GREU

REZUMAT DE TEORIE

Se consideră un fir omogen greu de lungime L şi de greutate specifică pe unitatea de lungime $\bar{p}$ având punctele de prindere de la capetele sale notate în continuare cu A şi B (fig. 7.1). Se urmăreşte în acest capitol :

- determinarea formei de echilibru (curba funiculară)
- determinarea modului de variație a tensiunii interioare din fir (efortul de întindere dintr-o secțiune oarecare atunci când firul este supus suplimentar (în afară de greutatea proprie) acțiunii unor forțe exterioare.

Ipotezele de lucru folosite sunt:

- firul se consideră ca un corp unidimensional (dimensiunile secțiunii se neglijează în raport cu lungimea sa)
- perfect flexibil (nu poate prelua eforturi de încovoiere)
- perfect inextensibil (nu îşi modifică lungimea sub acțiunea sarcinilor exterioare)

În aceste condiții ecuația generală de echilibru a firului sub formă vectorială se scrie: $$\frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 \qquad (1)$$

unde: $\bar{S} = \bar{S}(s)$ este funcția vectorială a tensiunii din fir funcție de arcul s, iar $\bar{p}$ este greutatea specifică pe unitatea de lungime a firului

Forma de echilibru a firului omogen greu este o curbă numită lănțişor având ecuația:

$$y = a\, ch(x/a + C_1) + C_2 \qquad (2)$$

Dacă curba este raportată la un sistem de axe Oxy şi este simetrică în raport cu axa Oy, iar minimul C are ordonata a atunci ecuația are forma simplă:

$$y = a\, ch(x/a) \qquad (3)$$

Lungimea unui arc limitat este $s = arc(CM) = a\, sh(x/a)$, lungimea întregii curbe este:

$$L = 2a\, sh(L = AB = 2a \cdot sh(\ell / a) = 2a \cdot tg\alpha \;\Rightarrow\; a = L / 2tg\alpha\, x/a).$$

Valoarea tensiunii S într-un punct oarecare al firului M(x,y)este proporțională cu ordonata y a punctului şi are expresia:

$$S = p\, y = p\, a\, ch(x / a) \qquad (4)$$

PROBLEME REZOLVATE

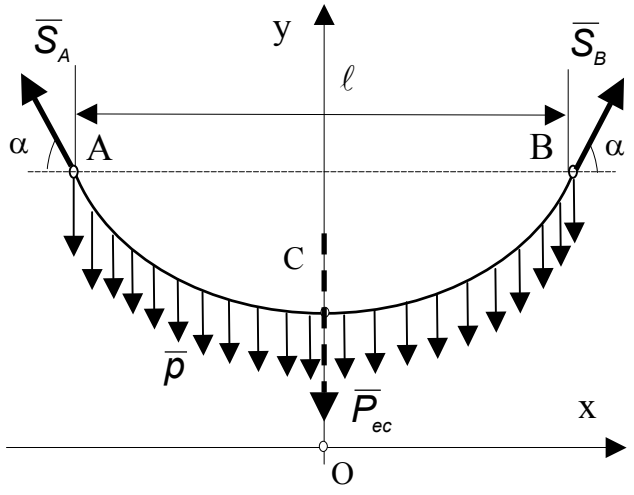


Fig. S7.1

7.1. ***Se consideră*** *un fir omogen de lungime L şi greutate specifică pe unitatea de lungime* $\overline{p}$*, suspendat în punctele A şi B aflate pe aceeaşi orizontală (ca în fig 7.1). Tangenta la fir în punctele A şi B face cu orizontala acelaşi unghi* α *cunoscut.*

Se cer: *1) valorile tensiunii în punctele A , B (capetele firului) şi C (situat în punctul cel mai de jos al firului); 2) săgeata firului f ; 3) distanța* $AB = \ell$.

Rezolvare

1) Tensiunea într-un punct oarecare *M(x,y)* al firului conform relației (4) este:

$$S = p\,y = p\,a\,ch(x/a) \tag{a}$$

Având în vedere că lungimea totală a firului se poate scrie:

$$L = arc(AB) = 2arc(CB) = 2a\,sh(\ell/2a) \tag{b}$$

iar din fig. S7.1 se poate scrie:

$$tg\alpha = f'(\ell/2) = sh(x/a)\big|_{x=\ell/2} = sh(\ell/2a) \tag{c}$$

rezultă că lungimea totală a firului este:

$$L = 2a\,sh(\ell/2a) = 2a\,tg\alpha, \;\Rightarrow a = L/2tg\alpha \tag{d}$$

Tensiunea într-un punct oarecare al firului fiind: $S = p\,a\,ch(x/a)$, rezultă că pentru x=0 se obține tensiunea din punctul C:

$$S_C = p\,a = pL/2tg\alpha \tag{e}$$

Întrucât proiecția pe orizontală a tensiunii în orice punct al firului este constantă se poate scrie: $S_A\cos\alpha = S_B\cos\alpha = S_C = H$, de unde rezultă:

$$S_A = S_B = S_C/\cos\alpha = pL/2\cos\alpha \tag{f}$$

2) Săgeata *f* a firului rezultă din relațiile tensiunilor din B şi C:

$$f = y_B - y_C = S_B/p - S_C/p = L(1-\cos\alpha)/2\sin\alpha \tag{g}$$

3) Pentru calculul distanței $AB = \ell$ se ține seama de faptul că:

$$sh\ell/2a = L/2a = tg\alpha \quad si \quad ch\ell/a = \sqrt{1+sh^2\ell/a} = 1/\cos\alpha \tag{h}$$

precum şi de definiţiile funcţiilor hiperbolice obţinându-se:

$$sh\ell / 2a + ch\ell / 2a = e^{\ell/2a} = (1 + sin\,\alpha) / cos\,\alpha;$$
$$\Rightarrow \ell / 2a = ln\frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}, \Rightarrow AB = \ell = 2a \cdot ln\frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \qquad \text{(i)}$$

Observaţie:

1. La aceleaşi rezultate se poate ajunge dacă se porneşte de la scrierea ecuaţiilor de echilibru ale forţelor firului liberat de legăturile din A şi B (fig.7.1)

   Aceste ecuaţii se scriu:

$$\sum X_i = 0 \Leftrightarrow -S_A\,cos\,\alpha + S_B\,cos\,\alpha = 0$$
$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow (S_A + S_B)\,sin\,\alpha - P_{ec} = 0 \qquad \text{(j)}$$

   unde P_{ec} este forţa echivalentă a sistemului de forţe paralele:

$$P_{ec} = \oint_{AB} pds = pL$$

2. După determinarea celor două tensiuni din fir, celelalte necunoscute se determină folosind procedeul prezentat anterior.

7.2. ***Se consideră*** *un fir omogen de lungime L şi greutate specifică pe unitatea de lungime* $\overline{p}$*, suspendat în punctele A şi B a căror diferenţă de nivel h este necunoscută (ca în fig 7.2). Tangentele la fir în punctele A şi B fac cu orizontala unghiurile* α_1 *şi* α_2 *cunoscute.*

Se cer: *1) valorile tensiunii în punctele A , B (capetele firului) şi C (situat în punctul cel mai de jos al firului); 2) diferenţa de nivel h ; 3) lungimea firului* L_1 *între A şi C şi diferenţa de nivel dintre punctele A şi C .*

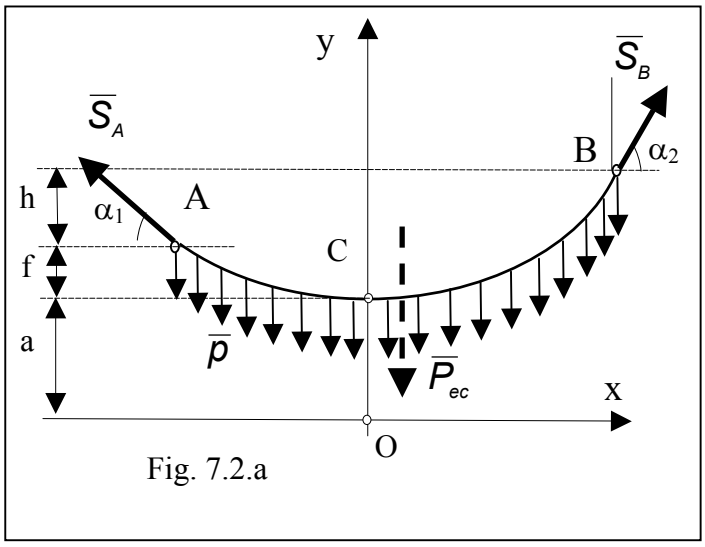


Fig. 7.2.a

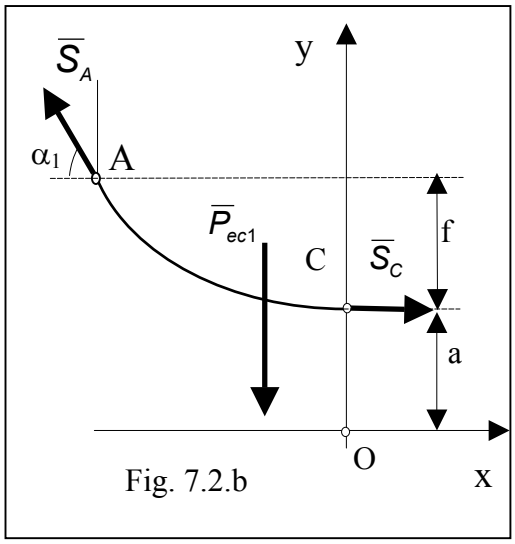


Fig. 7.2.b

Rezolvare

1) Dacă se izolează firul şi se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor firului eliberat de legăturile din A şi B (fig.7.1.a) se obține:

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0 \Leftrightarrow -S_A \cos\alpha_1 + S_B \cos\alpha_2 = 0 \\ &\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow S_A \sin\alpha_1 + S_B \sin\alpha_2 - P_{ec} = 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{pL\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}; \qquad S_B = \frac{pL\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \qquad (b)$$

unde P_{ec} este forța echivalentă a sistemului de forțe paralele: $P_{ec} = \oint_{AB} pds = pL$

2) Cunoscând coordonatele $A(x_A,y_A)$ şi $B(x_B,y_B)$ şi tensiunile din fir în A şi B: $S_A=py_A$, $S_B=py_B$, *avem:*

$$h = y_B - y_A = \frac{S_B}{p} - \frac{S_B}{p} = \frac{L(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$h = L\frac{\sin\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}. \qquad (c)$$

3) Izolând porțiunea de fir cuprinsă între A şi C (fig. 7.2.b) şi scriind ecuațiile de echilibru ale forțelor firului liberat de legăturile din A şi C se obține:

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0 \Leftrightarrow -S_A \cos\alpha_1 + S_C = 0 \\ &\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow S_A \sin\alpha_1 - P_{ec1} = 0 \end{aligned} \qquad (d)$$

$$\Rightarrow S_C = S_A \cos\alpha_1 = pL\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = \frac{S_A\sin\alpha_1}{p} = L\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \qquad (e)$$

unde P_{ec} este forța echivalentă a sistemului de forțe paralele:

$$P_{ec1} = \oint_{AC} pds = pL_1$$

Diferența de nivel dintre punctele A şi C se scrie:

$$f = y_A - a = \frac{S_A}{p} - \frac{S_C}{p}$$

$$f = L\frac{\cos\alpha_2(1-\cos\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}. \qquad (f)$$

7.3. ***Se consideră*** *un fir de greutate neglijabilă, suspendat în punctele A şi B aflate pe aceaşi orizontală (ca în fig. 7.2). În punctele O_1 şi O_2 ale firului sunt atârnate corpurile 1 şi 2 având greutăţile G_1 şi G_2, cu săgeţile corespunză-toare f_1 şi f_2.*

Se cer: *1) valorile tensiunii pe cele trei porţiuni ale firului; 2) unghiul β pe care îl face porţiunea de fir O_1O_2 cu orizontala; 3) lungimea totală a firului şi distanţa A_1A_2 dintre punctele de suspensie.*

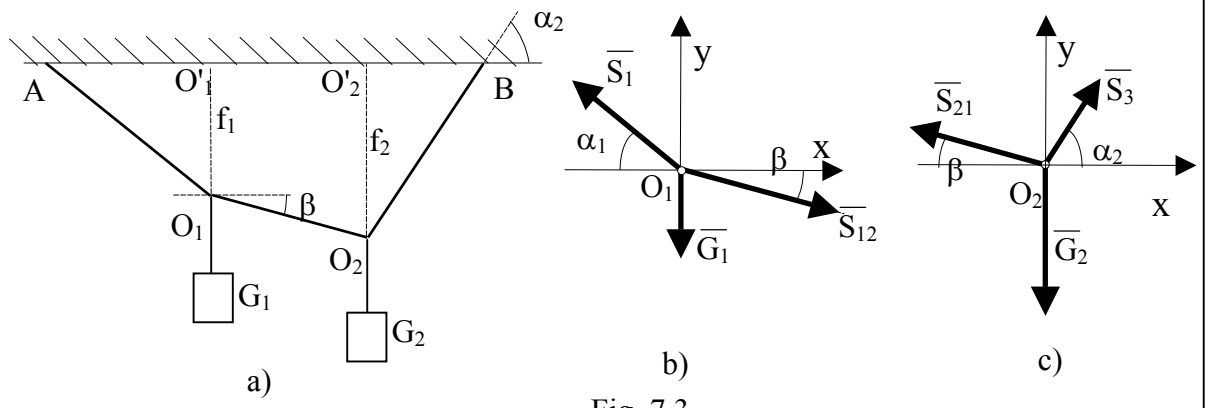


Fig. 7.3

Rezolvare

Întrucât firul nu are greutate, pe cele trei porţiuni A_1O_1, O_1O_2, O_2B, tensiunile din fir sunt constante. Pentru rezolvarea problemei se izolează nodurile O_1 şi O_2 şi se scriu ecuaţiile de echilibru al forţelor (fig. 7.3.b şi c.) obţinându-se:

$$\begin{aligned} &Nodul\ \ O_1: \begin{cases} -S_1 \cos\alpha_1 + S_{12}\cos\beta = 0 \\ S_1 \sin\alpha_1 + S_{12}\sin\beta - G_1 = 0 \end{cases} \\ &Nodul\ \ O_2: \begin{cases} S_2 \cos\alpha_2 - S_{21}\cos\beta = 0 \\ S_2 \sin\alpha_2 + S_{12}\sin\beta - G_2 = 0 \end{cases} \qquad (a) \\ &unde: \qquad S_{12} = S_{21} \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$S_1 = (G_1 + G_2)\frac{\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}; \qquad S_2 = (G_1 + G_2)\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}; \qquad (b)$$

$$tg\beta = \left(G_2 tg\alpha_1 - G_2 tg\alpha_1\right)/\left(G_1 + G_2\right)$$

$$S_{12} = \sqrt{S_1^2 + G_1^2 - S_1 G_1 \sin\alpha_1} = S_{21} = \sqrt{S_2^2 + G_2^2 - S_2 G_2 \sin\alpha_2} \qquad (c)$$

Lungimea totală a firului şi distanţa AB se determină astfel:

$$L = \frac{f_1}{\cos\alpha_1} + \frac{f_2 - f_1}{\cos\beta} + \frac{f_2}{\cos\alpha_2}; \; AB = f_1 ctg\alpha_1 + (f_2 - f_1)ctg\beta + f_1 ctg\alpha_2$$

7.4 Se consideră *un fir omogen greu aflat în repaus, având porţiunea AB pe un plan înclinat cu unghiul α fără frecare şi porţiunea BC liberă (ca în fig 7.4.a). Se cunosc: $\overline{p}$ greutatea specifică pe unitatea de lungime a firului, unghiul α , unghiul β pe care îl face tangenta la fir cu orizontala în punctul C, diferenţa de nivel h dintre punctele B şi C, lungimea firului L dintre punctele B şi C. Se cer: 1) valorea tensiunii în punctul C ; 2) lungimea L_1 pe planul AB.*

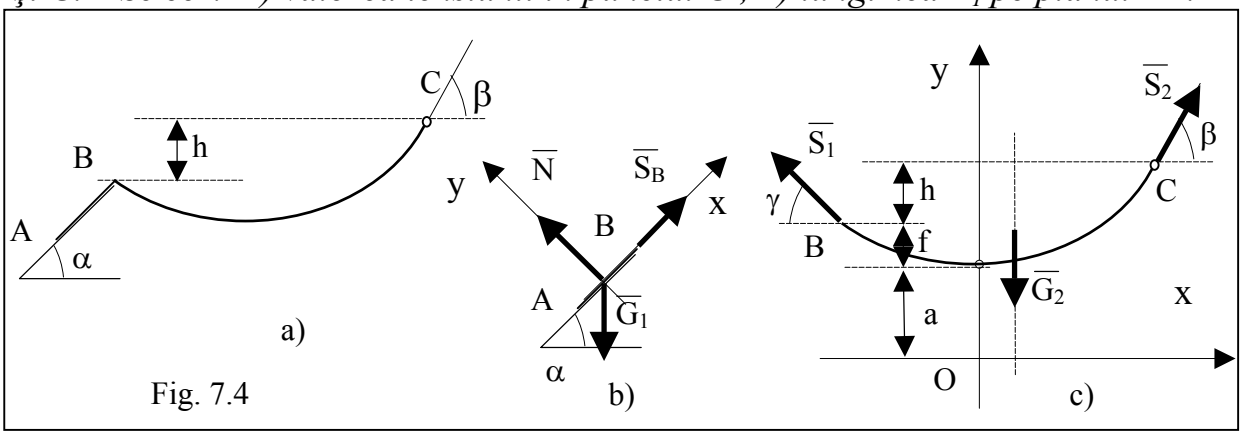


Fig. 7.4

Rezolvare

Dacă se izolează cele două porţiuni de fir şi se scriu ecuaţiile de echilibru ale forţelor firului eliberat de legături,

- pentru AB (fig.S7.4.b) se obţine:

$$\sum X_i = 0 \Leftrightarrow S_1 - G_1 \sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow S_1 = pL_1 \sin\alpha$$

$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow N - G_1 \cos\alpha = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$G_1 = pL_1; \quad S_1 = S_B$$

- pentru BC (fig.S7.4.c) se obţine:

$$\begin{cases} -S_B \cos\gamma + S_C \cos\beta = 0 \\ S_B \sin\gamma + S_C \sin\beta - G_2 = 0 \ (G_2 = pL) \end{cases} \Rightarrow S_B = \sqrt{S_C^2 + G_2^2 - S_C G_2 \sin 2\beta} \quad \text{(b)}$$

Cunoscând ordonata punctului C şi relaţia dintre tensiuni $S_C = py_C$

$$\Rightarrow S_C = pa \cdot ch\frac{x_C}{a} = pa \cdot \sqrt{1 + sh^2\frac{x_C}{a}} = \frac{pa}{\cos\beta}; \qquad \text{(c)}$$

Înlocuind expresiile obţinute pentru S_B şi S_C se obţine:

$$p^2 L_1^2 \sin^2\alpha = \frac{p^2 a^2}{\cos^2\beta} - 2pLa\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + p^2 L^2 \qquad \text{(d)}$$

Din fig. 7.4.c avem:

$$h = y_C - y_B = \frac{S_C}{p} - \frac{S_B}{p} = \frac{a}{\cos\beta} - L_1 \sin\alpha \quad \Rightarrow L_1 \sin\alpha = \frac{a}{\cos\beta} - h \qquad \text{(e)}$$

$$a = \frac{(L^2 - h^2)\cos\beta}{2(L\sin\beta - h)}. \qquad \text{(f)}$$

$$S_C = \frac{pa}{\cos\beta} = \frac{p(L^2 - h^2)}{2(L\sin\beta - h)}; \qquad L_1 = \frac{S_B}{p\sin\alpha} = \frac{L^2 + h^2 - 2Lh\sin\beta}{2\sin\alpha(L\sin\beta - h)}. \qquad \text{(g)}$$

CAPITOLUL VIII
CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

PROBLEME REZOLVATE

8.1 Se consideră *un punct material având vectorul de poziţie în raport cu originea O a sistemului de axe Oxy dat de:* $\bar{r} = \overline{OM} = 4t\,\bar{i} + \left(16t^2 - 1\right)\bar{j}$ *(cm).*

Se cer: *1) Ecuaţia traiectoriei şi trasarea ei în sistemul de axe Oxy; 2) Viteza şi acceleraţia punctului la momentul t; 3) Poziţia, viteza şi acceleraţia punctului la momentul* t_1*=1/2 s, precum şi raza de curbură a traiectoriei la acelaşi moment.*

Rezolvare :

1) Ecuaţiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 16t^2 - 1 \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Eliminând parametrul t din ecuaţiile (a) se obţine ecuaţia sub formă implicită a traiectoriei:

$$x^2 - y - 1 = 0 \quad \text{(b)}$$

Această ecuaţie reprezintă o parabolă (fig. 8.1) cu vârful în *V(0,-1)* care intersectează axa Ox în punctele *A(-1, 0) B(1,0).*

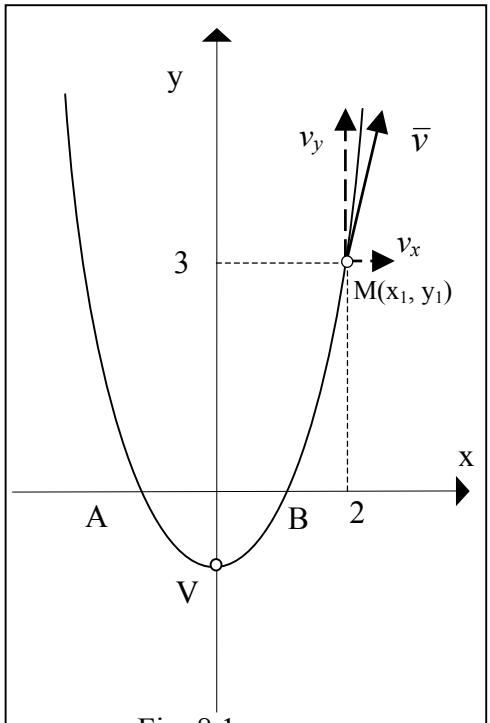


Fig. 8.1.a

2) Viteza şi acceleraţia punctului la momentul *t* se detremină cu ajutorul proiecţiilor:

- Viteza:

$$v_x = \dot{x} = 4$$
$$v_y = \dot{y} = 32t \quad \text{(c)}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16 + (32t)^2}$$

- Acceleraţia:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$
$$a_y = \ddot{y} = 32 \quad \text{(d)}$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32$$

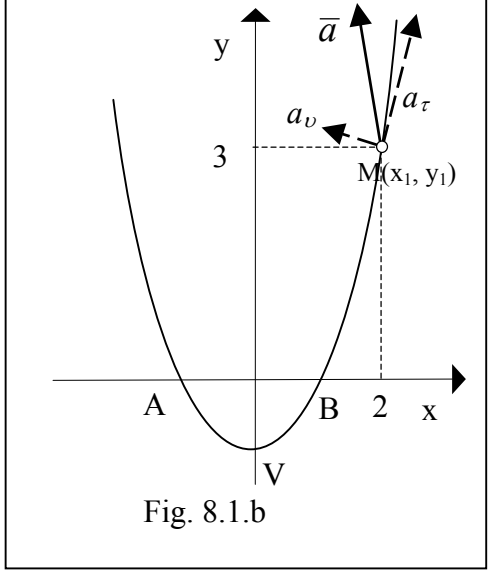


Fig. 8.1.b

3) Poziția, viteza şi accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul $t_1=1/2\ s$ sunt :

- poziția: $\begin{cases} x(t_1)=2\ \ cm \\ y(t_1)=3\ \ \ cm \end{cases}$; (e)
- viteza: $\begin{cases} \dot{x}(t_1)=4 \\ \dot{y}(t_1)=16 \end{cases} \Rightarrow\ v(t_1)=16{,}5\ cm/s$ (f)
- accelerația: $a(t_1)=32\ cm/s^2$ (g)

Accelerația tangențială la momentul $t_1=1/2\ s$ se obține prin derivarea în raport cu timpul a vitezei:

$$a_\tau=\left|\frac{dv}{dt}\right|=|\dot{v}|=\frac{2v_x\dot{v}_x-2v_y\dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_xa_x-v_ya_y}{v}$$

$$\Rightarrow a_\tau(t_1)=31 cm/s^2$$

Accelerația normală la momentul t_1 este prin urmare:

$$a_\nu=\sqrt{a^2-a_\tau^2}\Rightarrow a_\nu(t_1)=7{,}94\ cm/s^2 \quad \text{(h)}$$

- raza de curbură a traiectoriei (a) se calculează cu ajutorul formulei:

$$\rho=\frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|} \quad \text{sau:} \quad \rho=\frac{v^2}{a_\nu}$$

Raza de curbură la momentul $t_1=1/2\ s$ este:

$$\rho(t_1)=34{,}3\ cm \quad \text{(i)}$$

Elementele calculate sunt reprezentate în fig. 8.1. şi sunt trecute în tabelul următor :

Coordonate (cm)		Viteze (cm/s)			Accelerații (cm/s^2)					Raza (cm)
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_ν	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

8.2 Se consideră *un punct material pentru care se cunoaşte vectorul de poziție în raport cu originea O a sistemului de axe Oxy:* $\bar{r}=\overline{OM}=(3\sin\pi t)\bar{i}+(2\cos\pi t)\bar{j}$ *(cm).*

Se cer: *1) Ecuația traiectoriei (sub formă parametrică şi implicită în sistemul de axe Oxy) şi să se reprezinte grafic în sistemul de axe Oxy; 2) Viteza şi accelerația punctului; 3) Poziția, viteza şi accelerația punctului la momentul* $t_1=1/3\ s$*, precum şi raza de curbură a traiectoriei la acelaşi moment.*

Rezolvare :

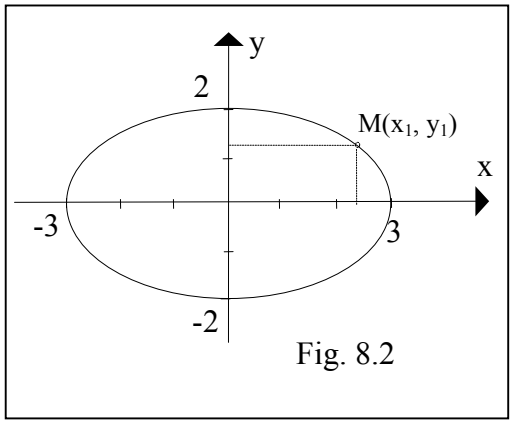


Fig. 8.2

3) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 3\sin \pi t \\ y = 2\cos \pi t \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Eliminând parametrul t din ecuațiile (a) se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Această ecuație reprezintă o elipsă cu centrul în originea sistemului de axe, de semiaxe*: a=3, b=2* (fig. 8.2)

2) Viteza şi accelerația punctului la momentul *t* se detremină cu ajutorul proiecțiilor:

- Viteza:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 3\pi \cos \pi t \\ v_y &= \dot{y} = -2\pi \sin \pi t \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi\sqrt{9\cos^2 \pi t + 4\sin^2 \pi t} = \pi\sqrt{4 + 5\cos^2 \pi t}$$

- Accelarația:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -3\pi^2 \sin \pi t \\ a_y &= \ddot{y} = -2\pi^2 \cos \pi t \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2\sqrt{9\sin^2 \pi t + 4\cos^2 \pi t} = \pi^2\sqrt{4 + 5\sin^2 \pi t}$$

3) Poziția, viteza şi accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul $t_1 = 1/3\ s$ sunt :

- poziția: $\begin{cases} x(t_1) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}598 \ \ cm \\ y(t_1) = 1 \ \ cm \end{cases}$; (e)

- viteza: $\begin{cases} \dot{x}(t_1) = \dfrac{3\pi}{2} \\ \dot{y}(t_1) = -\pi\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \ v(t_1) = \dfrac{\pi\sqrt{21}}{2} = 7{,}198 \ cm/s$ (f)

- accelerația: $\begin{cases} \ddot{x}(t_1) = \dfrac{-3\sqrt{3}\pi^2}{2} \\ \ddot{y}(t_1) = -\pi^2 \end{cases} \Rightarrow \ a(t_1) = \dfrac{\pi^2\sqrt{31}}{2} = 27{,}476 \ cm/s^2$ (g)

- raza de curbură a traiectoriei (a) se calculează cu ajutorul formulei:

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\right|} \qquad (h)$$

Raza de curbură la momentul $t_1=1/3\ s$ este:

$$\rho(t_1) = \frac{7\sqrt{21}}{16} = 2{,}005\ cm \qquad (i)$$

***8.3 Acelaşi enunț ca la probema 8.2**, cu următoarele date :*

$$\bar{r} = \overline{OM} = \left(2 + sin\frac{\pi}{3}t\right)\bar{i} + \left(1 + 2cos\frac{\pi}{3}t\right)\bar{j},\ \ cm\ \ ;\ \ momentul\ \ t_1=1\ s;$$

Rezolvare :

1) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 2 + sin\dfrac{\pi}{3}t \\ y = 1 + 2cos\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} x - 2 = sin\dfrac{\pi}{3}t \\ \dfrac{y-1}{2} = cos\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \qquad (a)$$

Ridicând la pătrat relațiile (a) şi însumând membru cu membru, se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei în sistemul Oxy:

$$(x-2)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (b)$$

care reprezintă o elipsă având centrul: *C (2 , 1)* de semiaxe: *a=1, b=2* (fig. 8.3).

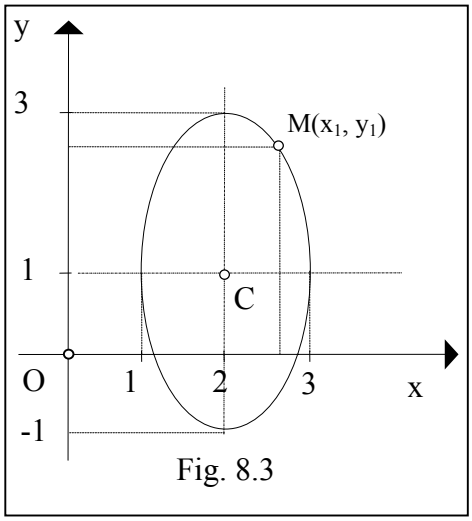


Fig. 8.3

2) Poziția, viteza, şi accelerația punctului la momentul *t* şi la momentul $t_1=1s$ sunt:

- Poziția

$$\begin{cases} x = 2 + \sin\dfrac{\pi}{3}t \\ y = 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}866\,cm \\ y(t_1) = 2 \quad cm \end{cases} \qquad (c)$$

- Viteza:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\pi}{3}cos\dfrac{\pi}{3}t \\ \dot{y} = -\dfrac{2\pi}{3}sin\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{1 + 3sin^2\dfrac{\pi}{3}t} \\ v(t_1) = \pi\sqrt{13}/6 = 1{,}888\ cm/s \end{cases} \qquad (d)$$

- Accelerația:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\pi^2}{9}\sin\dfrac{\pi}{3}t \\ \ddot{y} = -\dfrac{2\pi^2}{9}\cos\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{1+3\cos^2\frac{\pi}{3}t} \qquad \text{(e)}$$

$$\Rightarrow a(t_1) = \frac{\pi^2\sqrt{7}}{18} = 1{,}451\ cm/s^2$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului la momentul $t_1=1\ s$ este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right|}; \qquad \rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 2{,}929\ cm \qquad \text{(f)}$$

8.4. Se consideră *mecanismul bielă-manivelă din figura 8.4, pentru care se cunosc:* $OA = r$, $AB = \ell$, $MB = \ell/3$ *şi legea de mişcare a manivelei OA:* $\varphi(t) = 3\pi t$.

Se cer*: 1) Ecuația traiectoriei punctului M sub formă parametrică şi explicită;*

2) Poziția, viteza, accelerația punctului şi raza de curbură a traiectoriei la momentul t_1=1/6 s, dacă se cunosc valorile numerice: r=10cm, $\ell = 30cm$

Rezolvare :

Se notează cu α unghiul OBA (fig. 8.4). Coordonatele punctului M față de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_M = OA' + A'M' = r\sin\varphi + \dfrac{2}{3}\ell\cos\alpha \\ y_M = M'M = \dfrac{\ell}{3}\sin\alpha \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

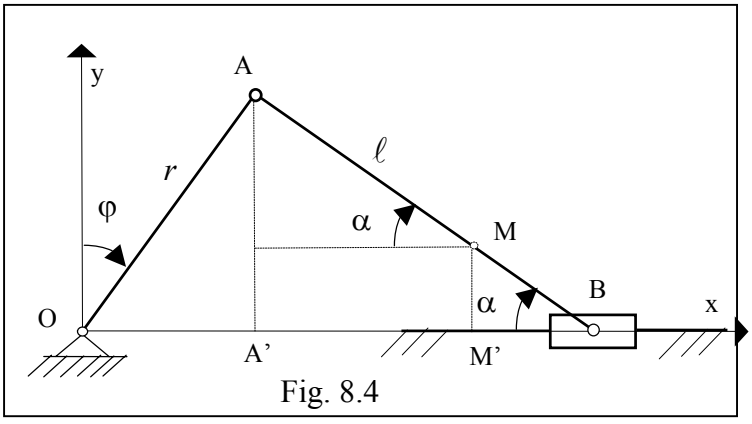


Fig. 8.4

Teorema sinusurilor în triunghiul OAB se scrie:

$$\frac{l}{\sin(90^0-\varphi)} = \frac{r}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{r}{\ell}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\cos^2\varphi}$$

Prin urmare, ecuațiile parametrice (a) devin:

$$\begin{cases} x = r\,sin\varphi + \dfrac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - r^2\,cos^2\varphi} \\ y = \dfrac{r}{3}cos\varphi \end{cases} \tag{a}$$

Eliminând parametrul φ din ecuațiile parametrice (a'), se obține ecuația explicită a traiectoriei punctului M în sistemul de axe Oxy:

$$x = \sqrt{r^2 - 9y^2} + \frac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - 9y^2} \tag{b}$$

2) Poziția, viteza, accelerația punctului şi raza de curbură la momentul $t_1=1/6\ s$, $(\varphi=\pi/2,\ \dot{\varphi} = 3\pi;\quad \ddot{\varphi} = 0)$ se determină astfel:

- $$\begin{cases} x = r\sin\varphi + \dfrac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - r^2\cos^2\varphi} \\ y = \dfrac{r}{3}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = r + \dfrac{2\ell}{3} = 30\ cm \\ y(t_1) = 0 \end{cases} \tag{c}$$

- $$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} r\left(cos\varphi + \dfrac{r}{3}\cdot\dfrac{sin2\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\,cos^2\varphi}}\right) \\ \dot{y} = -\dot{\varphi} r\left(\dfrac{1}{3}sin\varphi\right) \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = 0 \\ \dot{y}(t_1) = -\pi r \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = 31{,}416\ cm/s$$

- $$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\varphi}^2 r\left(-\sin\varphi + \dfrac{r}{6}\cdot\dfrac{4\cos 2\varphi\left(\ell^2 - r^2\cos^2\varphi\right) - r^2\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\left(\ell^2 - r^2\cos^2\varphi\right)^3}}\right) \\ \ddot{y} = -\dot{\varphi}^2 r\left(\dfrac{1}{3}\cos\varphi\right) \qquad (deoarece \quad \ddot{\varphi} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t_1) = 9\pi^2 r\left(-1 - \dfrac{2r}{3\ell}\right) \\ \ddot{y}(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = 220\ cm/s^2 \tag{e}$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului momentul $t_1=1/6\ s$ este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|};$$

$$\rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 4{,}486\ cm \tag{f}$$

8.5. Se consideră *mecanismul format din două pistoane şi o bielă (fig. 8.5), pentru care se cunosc* $AB=\ell$, $AM=2\ell/3$ *şi legea de mişcare a pistonului B*: $OB=s(t)=10\sqrt{3}\cos\pi t$.

Se cer*:*

1) Ecuaţiile sub formă parametrică şi implicită a traiectoriei punctul M al bielei

2) Poziţia, viteza, acceleraţia punctului şi raza de curbură la momentul $t_1=1/3$ *s, dacă se cunosc valorile numerice:* $\alpha=\pi/3$, $\ell=30cm$.

Rezolvare :

Se notează unghiurile: $BOA=\alpha$ şi $OAB=\beta$ (fig. 8.5)

Ecuaţiile sub formă parametrică ale traiectoriei punctului M al bielei sunt:

$$\begin{cases} x_M = OM' = OB' + B'M' = s\cos\alpha + \dfrac{\ell}{3}\cos\beta \\ y_M = M'M = \dfrac{2\ell}{3}\sin\beta \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

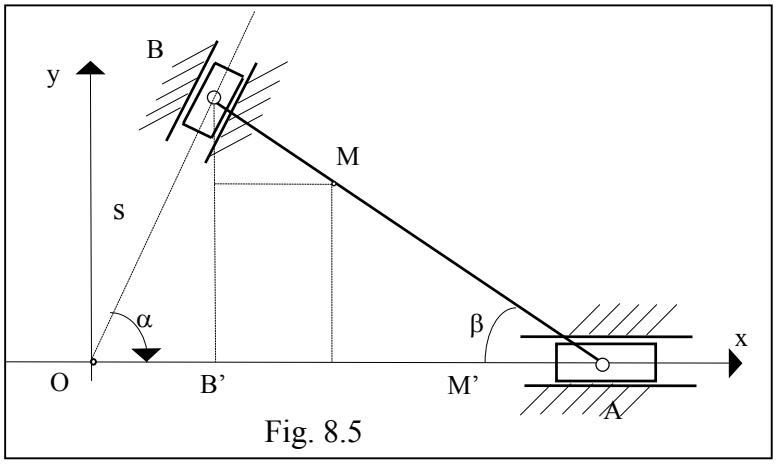


Fig. 8.5

Din teorema sinusurilor scrisă în triunghiul OAB, avem:

$$\frac{s}{\sin\beta}=\frac{\ell}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\beta=\frac{s}{\ell}\sin\alpha;$$

$$\Rightarrow \cos\beta=\sqrt{1-\frac{s^2}{\ell^2}\sin^2\alpha}$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului M se scriu:

$$\begin{cases} x = s\cdot\cos\alpha + \dfrac{1}{3}\sqrt{\ell^2 - s^2\sin^2\alpha} \\ y = \dfrac{2}{3}s\cdot\sin\alpha \end{cases} \qquad \text{(a')}$$

Eliminând parametrul *s* din ecuaţiile (a') se obţine ecuaţia explicită a traiectoriei punctului M :

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{4s^2-9y^2}+\frac{1}{6}\sqrt{4\ell^2-9y^2} \qquad \text{(b)}$$

2) Poziţia, viteza, acceleraţia punctului şi raza de curbură la momentul $t_1=1/3$ *s,* ($\varphi=\pi/3s$; $s(t_1)=10\sqrt{3}\cdot\cos\pi/3=5\sqrt{3}$ *cm;* $\dot{s}(t_1)=-10\sqrt{3}\pi\cdot\sin\pi/3=-15\pi$ *cm/s* $\ddot{s}(t_1)=-10\sqrt{3}\pi^2\cdot\cos\pi/3=-5\sqrt{3}\pi^2$ *cm/s*^{2}) *se determină astfel:*

- Poziția:

$$\begin{cases} x = s\cdot cos\,\alpha + \dfrac{1}{3}\sqrt{\ell^2 - s^2\,sin^2\,\alpha} \\ y = s\cdot\left(\dfrac{2}{3}sin\,\alpha\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = 14{,}013\ cm \\ y(t_1) = 5\ cm \end{cases} \qquad (c)$$

- Viteza:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{s}\left(cos\,\alpha - \dfrac{s\cdot sin^2\,\alpha}{3\sqrt{\ell^2 - s^2\,sin^2\,\alpha}}\right) \\ \dot{y} = \dot{s}\cdot\left(\dfrac{2}{3}cos\,\alpha\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t_1) = -20{,}05\ cm/s \\ \dot{y}(t_1) = -15{,}7\ \ cm/s \\ v(t_1) = 25{,}465\ \ cm/s \end{cases} \qquad (d)$$

- Accelerația:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{s}\cdot\left(cos\,\alpha - \dfrac{s\cdot sin^2\,\alpha}{3\sqrt{\ell^2 - s^2\,sin^2\,\alpha}}\right) - \dot{s}^2\,\dfrac{\ell^2\,sin^2\,\alpha}{3\sqrt{\left(\ell^2 - s^2\,sin^2\,\alpha\right)^3}} \\ \ddot{y} = \ddot{s}\cdot\left(\dfrac{2}{3}cos\,\alpha\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t_1) = -72{,}6\ \ cm/s^2 \\ \ddot{y}(t_1) = -28{,}49\ \ cm/s^2 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = 77{,}99\ cm/s^2 \qquad (e)$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului momentul $t_1=1\ s$ este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}; \qquad \rho(t_1) = 29{,}044\ cm \qquad (f)$$

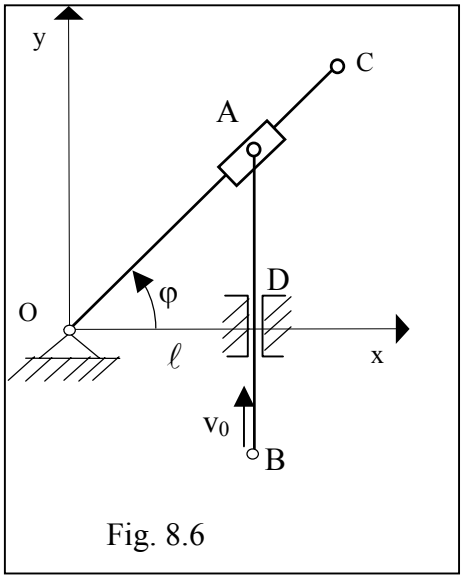


Fig. 8.6

8.6. Se consideră *mecanismul format din două bare OC şi AB (O =articulație fixă) şi două culise: prima mobilă în A şi a doua fixă în D (fig. 8.6), pentru care se cunosc OC=a, OD = ℓ şi legea de mişcare a barei AB: s=DA=v_0t.*

Se cer*:*

1) Ecuațiile sub formă parametrică şi implicită a traiectoriei punctul C al bielei .

2) Poziția, viteza şi accelerația punctului C pentru poziția particulară φ=π /4, dacă se cunosc valorile numerice:

$a = 10cm$, $\ell = 30cm$, v_0=30cm/s.

Rezolvare :

Coordonatele punctului C față de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_C = a\cos\varphi \\ y_C = a\sin\varphi \end{cases} \tag{a}$$

Este evident faptul că punctul C descrie cercul de rază a : $x_C^2 + y_C^2 = a^2$

Din triunghiul OAD rezultă :

$$\cos\varphi = \frac{OD}{DA} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{OD}{DA} = \frac{v_0 t}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}.$$

Deci ecuațiile parametrice ale pnctului C sunt:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{a\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}; \\ y_C &= \frac{a v_0 t}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}. \end{aligned} \tag{b}$$

Viteza punctului C se obține derivând expresiile (b):

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \frac{-a\ell v_0^2 t}{\left(\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}\right)^3}; \\ \dot{y}_C &= \frac{a v_0 \ell^2}{\left(\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}\right)^3}; \qquad \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \frac{a v_0 \ell}{\ell^2 + (v_0 t)^2} \end{aligned} \tag{c}$$

Acceletația punctului C se obține prin derivarea vitezei

$$a = |\dot{v}| = \frac{2a\ell v_0^3 t}{\left(\ell^2 + (v_0 t)^2\right)^2} \tag{d}$$

Viteza şi acceleraţia punctului C pentru poziția particulară φ=π /4, adică pentru $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}} \qquad \Rightarrow t_1 = \frac{\ell}{v_0}$ şi au valorile următoare:

$$v(t_1) = \frac{a v_0 \ell}{\ell^2 + (v_0 t_1)^2} = \frac{a v_0}{2\ell} = 5 \ \ cm/s \tag{e}$$

$$a(t_1) = \frac{2a\ell v_0^3 t_1}{\left(\ell^2 + (v_0 t_1)^2\right)^2} = \frac{a v_0^2}{2\ell^2} = 5 cm/s^2 \tag{f}$$

8.7. Se consideră *bara AB ce alunecă cu extremităţile sale A şi B după direcţiile axelor Ox şi Oy ca figura 8.7, astfel încât punctul B se deplasează spre originea O cu viteza* $v_0=v_B=constant$. ***Se cer****:*

1) Ecuaţia traiectoriei punctului M al barei, ştiind că MA=a, MB=b.

2) Poziţia, viteza şi acceleraţia punctului pentru $\varphi_1=\pi/6$ *s, dacă se cunosc valorile numerice pentru:* $a=20cm$, $b=10cm$, $v_0=5cm/s$

Rezolvare :

Se notează cu φ unghiul OBA (fig. 8.7). Coordonatele punctului M faţă de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_M = b\sin\varphi \\ y_M = a\cos\varphi \end{cases} \quad (a)$$

Eliminând parametrul φ se obţine ecuaţia traiectoriei sub forma unei elipse cu centrul în O, de semiaxe *b* şi *a*:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0 \quad (b)$$

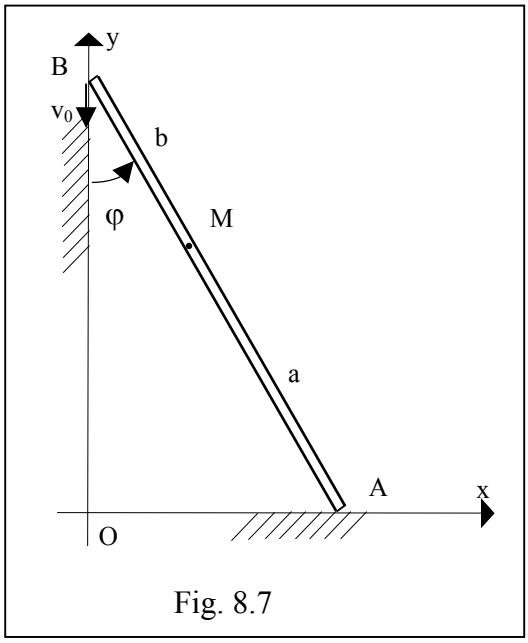


Fig. 8.7

Componentele vitezei şi acceleraţiei punctului M se obţin prin derivarea relaţiilor (a):

$$\begin{cases} \dot{x}_M = b\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi \\ \dot{y}_M = -a\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -b\dot{\varphi}^2\cdot\sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cdot\cos\varphi \\ \ddot{y}_M = -a\dot{\varphi}^2\cdot\cos\varphi - a\ddot{\varphi}\cdot\sin\varphi \end{cases} \quad (c)$$

Pentru a determina mărimile vitezei unghiulare $\dot{\varphi}$ şi acceleraţie unghiulare $\ddot{\varphi}$ se exprimă componentele vitezei punctului B în funcţie de parametrul φ:

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = (a+b)\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_B = 0 \\ \dot{y}_B = -(a+b)\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0}{(a+b)\sin\varphi} \quad (d)$$

Dacă se derivează în raport cu timpul viteza unghiulară $\dot{\varphi}$ se obţine:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{v_0^2}{(a+b)^2}\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \quad (e)$$

Înlocuind (d) şi (e) în relaţiile (c) se obţine:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = \dfrac{bv_0}{a+b} ctg\varphi \\ \dot{y}_M = -\dfrac{av_0}{a+b} \ (=ct) \end{cases} \Rightarrow v_M = \frac{v_0}{a+b}\sqrt{a^2 + b^2 ctg^2\varphi} \qquad \text{(f)}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -b\dot{\varphi}^2 \cdot sin\varphi + b\ddot{\varphi} \cdot cos\varphi = -\dfrac{bv_0^2}{(a+b)^2 sin^3\varphi} \\ \ddot{y}_M = -a\dot{\varphi}^2 \cdot cos\varphi - a\ddot{\varphi} \cdot sin\varphi = 0 \end{cases} \qquad \text{(g)}$$

$$\Rightarrow a_M = \frac{bv_0^2}{(a+b)^2 sin^3\varphi}$$

Poziția , viteza şi acceleraţia punctului M pentru $\varphi_1=\pi/6$ sunt:

$$\begin{cases} x_M = b\,sin\varphi_1 = 5\ cm \\ y_M = a\,cos\varphi_1 = 17{,}32\,cm \end{cases}$$

$$v_M(\varphi_1) = \frac{v_0}{a+b}\sqrt{a^2 + b^2 ctg^2\varphi_1} = 4{,}41\ cm/s$$

$$a_M(\varphi_1) = \frac{bv_0^2}{(a+b)^2 sin^3\varphi_1} = 2{,}22\ \ cm/s^2 \qquad \text{(h)}$$

Observaţie :

La acelaşi rezultat dat de relaţiile (g) se poate ajunge derivând relaţiile (f):

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = \dfrac{bv_0}{a+b}\left(ctg\varphi\right)' = \dfrac{bv_0}{a+b} \cdot \dfrac{\left(-\dot{\varphi}\right)}{sin^2\varphi} = -\dfrac{bv_0^2}{(a+b)^2 sin^3\varphi} \\ \ddot{y}_M = 0 \end{cases}$$

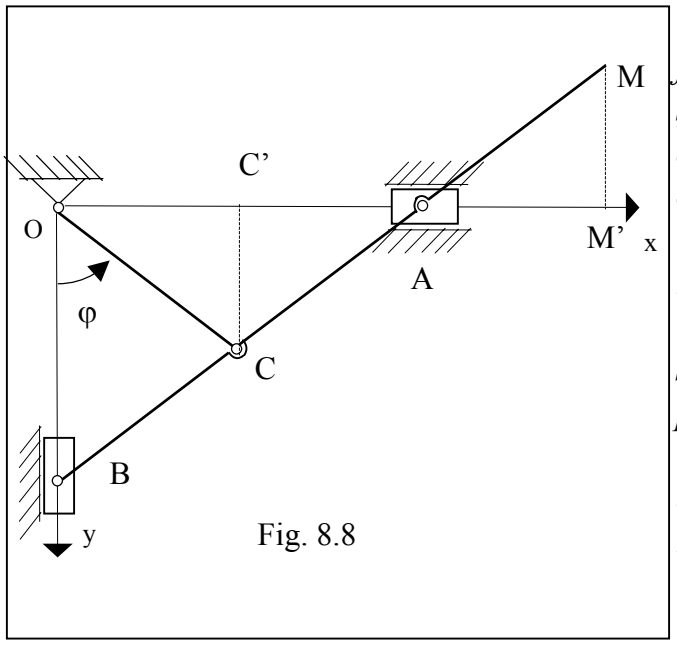


Fig. 8.8

8.8. Se consideră *mecanismul format din două bare articulate OC şi AB şi două culise: prima culisă din A după axa Ox şi a doua culisă din B după axa Oy (fig. C1.8), unde OC=AC=CB=AM=ℓ şi legea de mişcare a barei OC, φ(t)=3πt (rad).*

Se cer*: 1) Ecuaţiile sub formă parametrică şi implicită a traiectoriei punctul M. 2) Viteza şi acceleraţia punctului M la momentul t_1=1/9 s dacă se cunoaşte valoarea pentru* $\ell = 30cm$

Rezolvare :

Coordonatele punctului M sunt:

$$\begin{cases} x_M = 3\ell \cdot sin\varphi \\ y_M = -\ell \cdot cos\varphi \end{cases} \qquad (a)$$

Ridicând la pătrat relațiile (a) şi însumând membru cu membru, se obține ecuația traiectoriei sub formă implicită:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \qquad (b)$$

care reprezintă o elipsă având centrul în origine şi semiaxele: $a = 3\ell;\ b = \ell$

Deci ecuațiile parametrice ale pnctului M sunt:

$$\begin{cases} x_M = 3\ell \cdot sin3\pi t \\ y_M = -\ell \cdot cos3\pi t \end{cases} \qquad (c)$$

Viteza punctului M:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = 9\pi\ell \cdot cos3\pi t \\ y_M = 3\pi\ell \cdot sin3\pi t \end{cases} \qquad (d)$$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{x}_M^2} = 3\pi\ell\sqrt{1 + 8cos^2 3\pi t}$$

Accelerația punctului M:

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -27\pi^2\ell \cdot sin3\pi t \\ \ddot{y}_M = 9\pi^2\ell \cdot sin3\pi t \end{cases} \qquad (e)$$

$$\Rightarrow a(t) = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = 9\pi^2\ell \cdot \sqrt{1 + 8sin^2 3\pi t}$$

Poziția, viteza şi accelerația punctului M la momentul t_1 =1/9 s, sunt :

$$\begin{cases} x_M(t_1) = 3\ell \cdot sin3\pi t_1 = 77{,}942\ cm \\ y_M(t_1) = -\ell \cdot cos3\pi t_1 = -15\ cm \end{cases}$$

$$v(t_1) = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 3\pi\ell \cdot \sqrt{1 + 8cos^2 3\pi t} = 489{,}726\ cm/s \qquad (f)$$

$$a(t_1) = 9\pi^2\ell \cdot \sqrt{1 + 8sin^2 3\pi t} = 7050{,}38 cm/s^2$$

8.9. Se consideră *mecanismul format din două bare articulate OC şi AB şi două culise: B după axa Ox şi C după axa Oy (fig. C1.8), unde OA=AC=AB=ℓ şi legea de mişcare a barei OC, $\varphi(t)=\omega t$ (ω=const).*

Se cer*: Viteza şi acceleraţia punctelor B şi C în funcţie de t şi la momentul t_1=1/18 s dacă se cunoaşte valoarea lungimii $\ell = 10cm$ şi $\omega=3\pi$ rad/s.*

Rezolvare :

Coordonatele punctelor B şi C sunt:

$$\begin{cases} x_B = 2\ell \cdot cos\,\omega t \\ y_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 2\ell \cdot sin\,\omega t \end{cases}$$

Viteza punctelor B şi C sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -2\ell\omega \cdot sin\,\omega t \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases} \Rightarrow v_B = 2\ell\omega \cdot sin\,\omega t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_C = 0 \\ \dot{y}_C = 2\ell\omega \cdot cos\,\omega t \end{cases} \Rightarrow v_C = 2\ell\omega \cdot cos\,\omega t$$

(a)

(b)

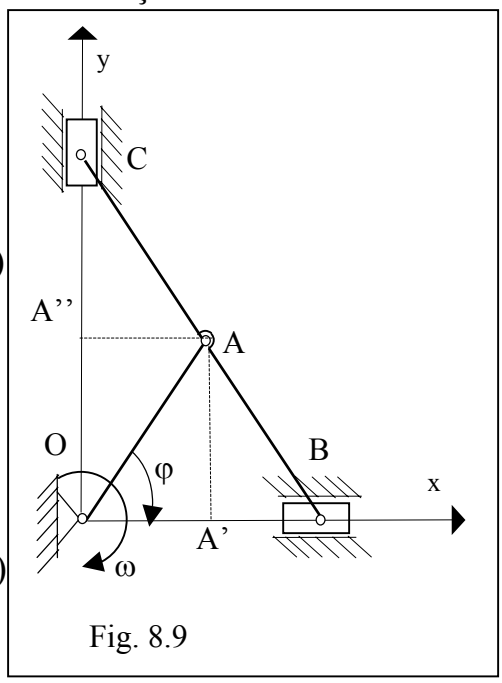


Fig. 8.9

Acceleraţia punctelor B şi C sunt:

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = -2\ell\omega^2 \cdot cos\,\omega t \\ \ddot{y}_B = 0 \end{cases} \Rightarrow a_B = 2\ell\omega^2 \cdot cos\,\omega t$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{y}_C = -2\ell\omega^2 \cdot sin\,\omega t \end{cases} \Rightarrow a_C = 2\ell\omega^2 \cdot sin\,\omega t \qquad (c)$$

Poziţia, viteza şi acceleraţia punctelor B şi C la momentul t_1=1/18 s, sunt :

$$\begin{cases} x_B = 2\ell \cdot cos\,\pi/6 = 17{,}32\,cm \\ y_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 2\ell \cdot sin\,\pi/6 = 10cm \end{cases} \qquad (d)$$

$$\begin{cases} v_B = 2\ell\omega \cdot sin\,\pi/6 = 94{,}25\,cm/s \\ v_C = 2\ell\omega \cdot cos\,\pi/6 = 163{,}24\,cm/s \end{cases} \qquad (e)$$

$$\begin{cases} a_B = 2\ell\omega^2 \cdot cos\,\pi/6 = 1538{,}52\ cm/s^2 \\ a_C = 2\ell\omega^2 \cdot sin\,\pi/6 = 888{,}26\ cm/s^2 \end{cases} \qquad (f)$$

PROBLEME PROPUSE

8.10 ... 8.13. Se consideră *bara AB ce alunecă ca figură (fig. 8.10 ... 8.13), astfel încât punctul B rămâne permanent în contact cu muchia/suprafața cilindrică iar punctul O se deplasează cu viteza v_0=constant.* ***Se cer****:*

1) Ecuația traiectoriei punctului M al barei, cunoscând h , R, MA=a, MB=b.

2) Poziția, viteza şi accelerația punctului la momentul t.

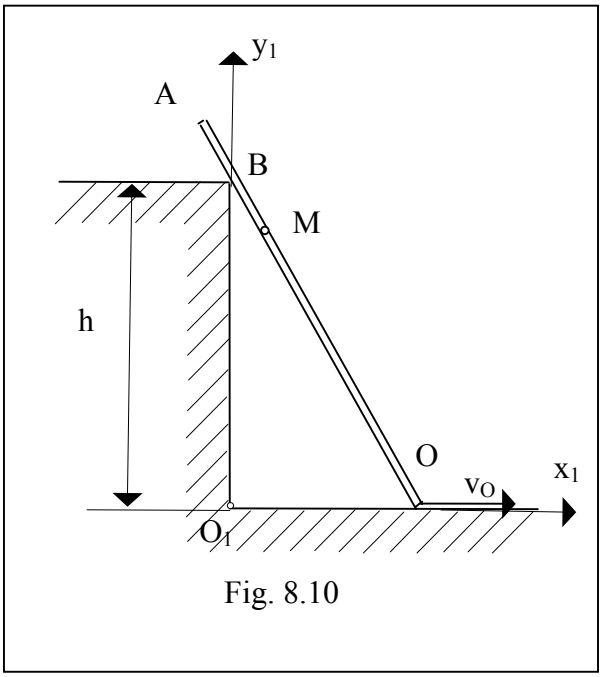


Fig. 8.10

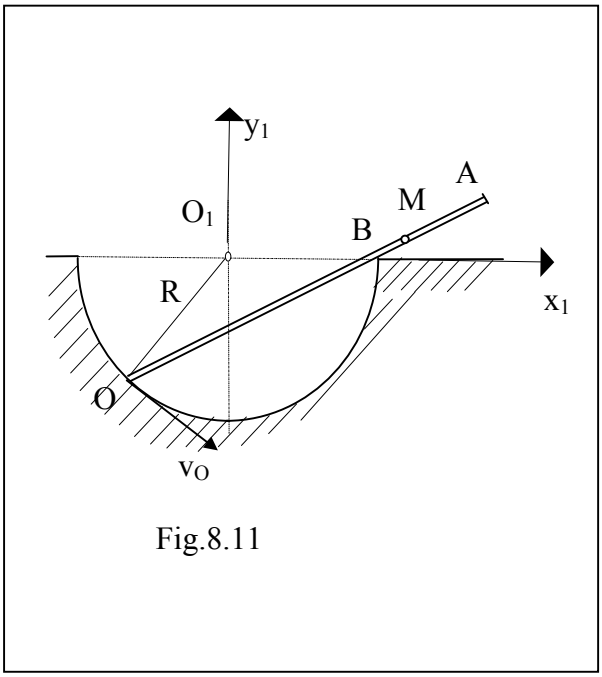


Fig.8.11

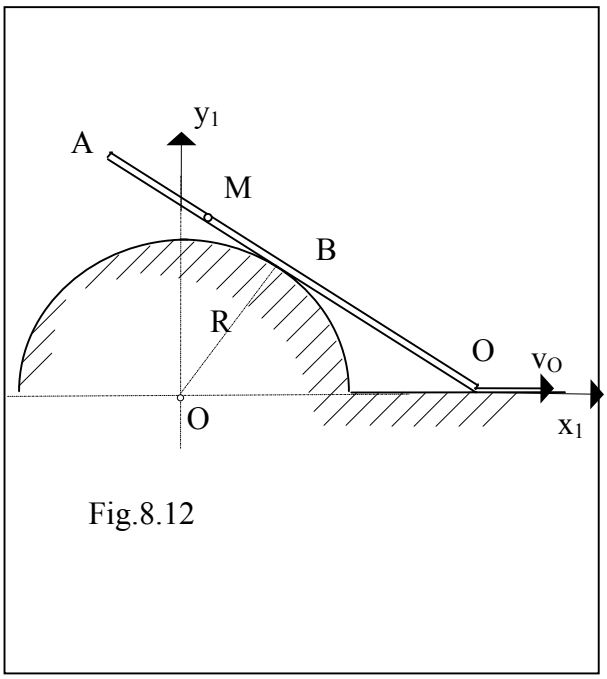


Fig.8.12

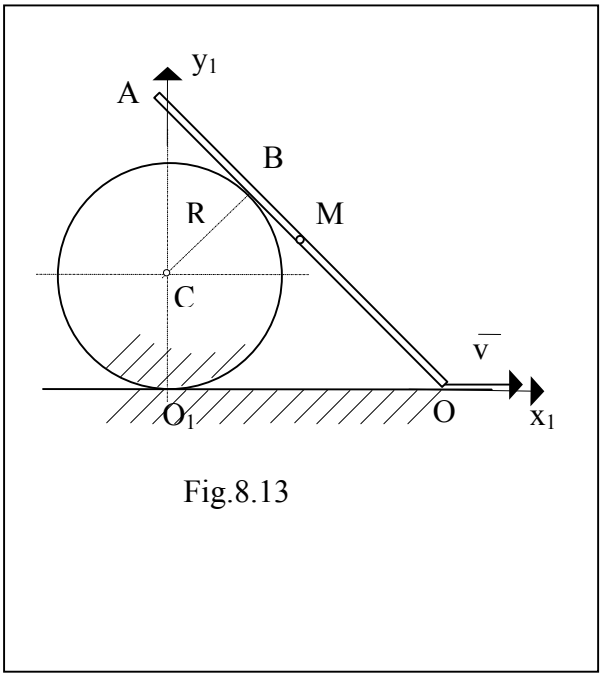


Fig.8.13

CAPITOLUL IX
DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

9.1. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe o suprafață orizontală* $A_OA_1 = L$, *cu frecare* $(\mu \neq 0)$, *pornind din* A_0 *cu viteza inițială* v_o *dată.(fig. 9.1.a)* ***Se cere:*** *Să se studieze mişcarea pe* A_0A_1, *deteminâdu-se viteza în* A_1 ($v_{A1} = v_1$), *folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*

Rezolvare:

Se alege sistemul de axe Oxy cu originea în A_0 şi axa Ox pe ortizontală, ca în fig. 9.1.b. Ecuația vectorială de mişcare pe A_0A_1 se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{T} \qquad \text{(a)}$$

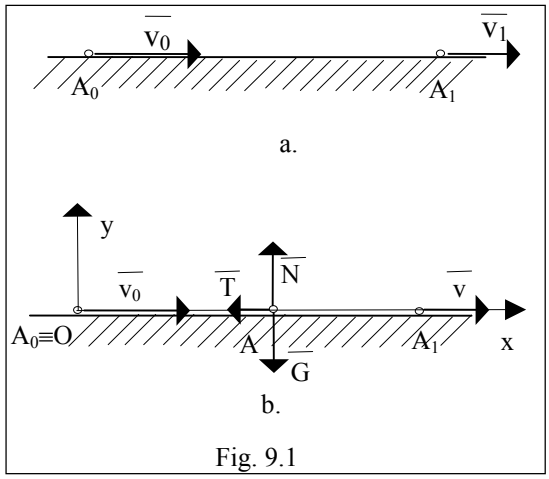


Fig. 9.1

care proiectată pe axele x şi y conduce la

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \\ m\ddot{y} = -mg + N \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

la care se asociază condiția geometrică:

$$y = 0 \qquad (\ddot{y} = 0), \qquad \text{(c)}$$

şi condiția fizică a frecării:

$$T = \mu N, \qquad \text{(d)}$$

Ținând seama de condiția (c), din a doua ecuație (b) se obține: $N = mg$

Ținând seama de condiția (d), dacă înlocuim în prima ecuație (b) se obține: $\ddot{x} = -\mu g \quad \Rightarrow \dot{x} = -\mu g t + C_1 \quad \Rightarrow x = -\mu g \dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$ (e)

Punând condițiile inițiale la momentul $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0$ se obțin constantele de integrare din (e): $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$. Deci legile de mişcare sunt: $x(t) = -\mu g \dfrac{t^2}{2} + v_0 t, \qquad v(t) = -\mu g t + v_0$ (f)

Eliminând parametrul t se obține: $v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x}$ (g)

Pentru $x = x_{A_1} = L$, se obține viteza din A_1: $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g L}$ (h)

Iar din teorema energiei cinetice : $E_1 - E_0 = L_{0-1}$ adică

$\dfrac{mv_1^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = \int_0^L X dx = -\mu mgL$, şi se obține aceeaşi expresie pentru v_1.

9.2. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul α , cu frecare $(\mu \neq 0)$, pe linia de cea mai mare pantă, pornind din A_0 cu viteza inițială v_o dată (fig. 9.2.a).* ***Se cere:***

1) *Să se determine legea de mişcare la urcare şi să se determine distanța A_0A_1=L (în A_1 punctul material se opreşte), folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*
2) *Să se determine legea de mişcare la coborâre dacă $\mu < tg\alpha$ şi să se determine viteza cu care trece prin A_0, folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*

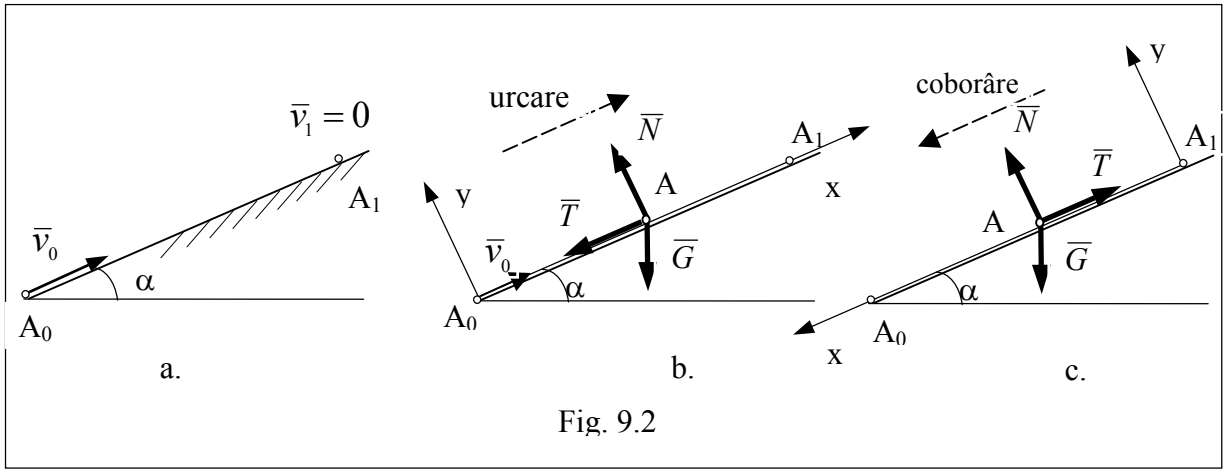


Fig. 9.2

Rezolvare:

1) În cazul urcării pe planul înclinat, se alege sistemul de axe *Oxy* cu originea în A_0 şi axa *Ox* pe direcția planului în sensul mişcării, ca în *fig. 9.2.b* şi se eliberează punctul de legături introducându-se forțele de legătură $\bar{N}$ *si* $\bar{T}$ $(T = \mu N)$ (conform axiomei legăturilor).

Ecuația diferențială a mişcării pe A_0A_1, în proiecții pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Ecuația traiectoriei (condiția geometrică) este:

$$y = 0\ (\dot{y} = 0;\ \ \ddot{y} = 0) \qquad \text{(b)}$$

Condiția fizică a frecării este: $T = \mu N$, (c)

care introduse în (a) conduce la:

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ \ddot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație (d), se obține:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t + C_1, \\ x &= -\frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial *t = 0 :*

x (0) = 0, $\dot{x}(0) = v_0$ rezultă constantele de integrare: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$.

Legea de mișcare este dată de:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}(sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha) g t^2 \tag{f}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 - (sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha) g t.$$

Eliminând parametrul t se obține:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2xg(sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha)} \tag{g}$$

În punctul A_1 deplasarea este $x_{A1} = L$ şi $v_{A1} = 0$, rezultă:

$$L = \frac{v_0^2}{2g(sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha)}. \tag{h}$$

Teorema energiei cinetice se scrie:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1}$$

unde: $E_1 = 0$, $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$$L_{0-1} = \int_{0-1} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{0-1} \left[(-G sin\,\alpha - T)\bar{i} + (-G cos\,\alpha + N)\bar{j}\right] \cdot (dx\bar{i})$$

$$L_{0-1} = (-G sin\,\alpha - T) L$$

deoarece: $T = \mu N, \quad N = G\, cos\,\alpha$,

avem: $L_{0-1} = -mgL(sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha)$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem aceeaşi relație pentru *L.*

2) În cazul coborârii pe planul înclinat, se alege sistemul de axe *Oxy* cu originea în A_1 şi axa *Ox* pe direcția planului în sensul mişcării, ca în *fig. 9.2.c* , se introduc forțele de legătură $\overline{N} \quad si \quad \overline{T}$.

Ecuația diferențială a mişcării pe A_1A_0, în proiecții pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\,sin\,\alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg\,cos\,\alpha + N, \end{aligned} \tag{i}$$

Ecuația traiectoriei (condiția geometrică) este:

$$y = 0 \;(\dot{y} = 0; \;\; \ddot{y} = 0) \tag{j}$$

Condiția fizică a frecării este: $T = \mu N$, (k)

care introduse în (i) conduce la:

$$\begin{aligned} N &= mg\,cos\,\alpha \\ \ddot{x} &= g(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha) \end{aligned} \tag{l}$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație (l), se obține:

$$\dot{x} = g(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)t + C_1,$$
$$x = \frac{1}{2}(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)gt^2 + C_1 t + C_2. \qquad \text{(m)}$$

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial $t = 0$:

$x\,(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ rezultă constantele de integrare: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

*L*egea de mişcare este dată de:

$$x(t) = \frac{1}{2}(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)gt^2 \qquad \text{(n)}$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = (sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)gt.$$

Eliminând parametrul t se obține:

$$v(x) = \sqrt{2xg(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)} \qquad \text{(o)}$$

În punctul A_0 (la coborâre) deplasarea este $x = L$ şi viteza $v_{A_0} = v_0'$, rezultă: $v_0' = \sqrt{2Lg(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)}$ (p)

unde înlocuind valoarea lui *L* obținută cu relația (h) rezultă:

$$v_0' = v_o \sqrt{\frac{sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha}{sin\,\alpha + \mu\, cos\,\alpha}} \qquad \text{(q)}$$

Teorema de variație a energiei cinetice se scrie:

$$E_{A_0} - E_{A_1} = L_{A_1 - A_0}$$

unde: $E_{A_1} = 0$, $E_{A_0} = \frac{1}{2} m v_0'^2$ (r)

$$L_{A_0 - A_1} = \int_{0-1} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{0-1} \left[(Gsin\,\alpha - T)\bar{i} + (-Gcos\,\alpha + N)\bar{j}\right] \cdot (dx\bar{i})$$
$$L_{A_0 - A_1} = (Gsin\,\alpha - T)L \qquad \text{(s)}$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem pentru v'_0 aceeaşi expresie:

$$v_0' = \sqrt{2Lg(sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha)} \qquad \text{(t)}$$

Observație:

Radicalul din relația (p) are sens dacă $sin\,\alpha - \mu\, cos\,\alpha > 0$ adică $\mu < tg\alpha$ sau $\varphi < \alpha$, unde φ este unghiul de frecare ($\varphi = arctg\mu$). Această condiție este prevăzută în enunțul problemei.

9.3. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe o suprafață cilindrică exterioară de rază R, fără frecare* $(\mu = 0)$*, pornind din* A_0 *cu viteza inițială* v_o *(fig. 9.3.a.).*

Se cere *să se studieze mişcarea pe* A_0A_1*, deteminând viteza în* A_1 (v_{A1}) *când punctul material părăseşte suprafața cilindrică, atât din ecuația de mişcare cât şi din teorema de variației a energiei cinetice.*

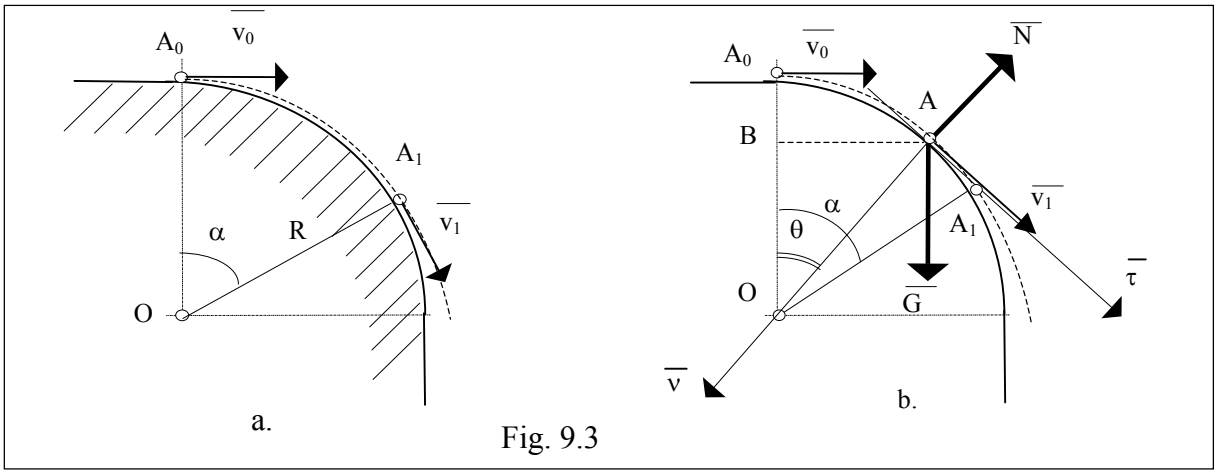


Fig. 9.3

Rezolvare:

Se alege sistemul de axe natural cu originea în A, ca în fig. 9.3.b. Ecuația vectorială de mişcare pe porțiunea cilindrică se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{G} + \bar{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural se scriu:

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\sin\theta \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = mg\cos\theta - N \end{cases} \tag{b}$$

unde înlocuind: $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta}$

în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta} = g\ \sin\theta \qquad sau: \qquad vdv = Rg\ \sin\theta\, d\theta$$

Prin integrare se obține : $\dfrac{v^2}{2} = -Rg\cos\theta + C$ (c)

Introducând condițiile inițiale: $\theta(0)=0,\ v(0)=v_0$

se obține constanta de integrare: $C = \dfrac{v_0^2}{2} + Rg$,

Legea de mişcare a punctului pe suprafața cilindrică se scrie:

$$v(\theta) = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta) + v_0^2} \tag{d}$$

Înlocuind (b) şi $\rho = R$ (condiția geometrică a mişcării) în ecuația a doua din (b) se obține reacțiunea normală:

$$N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R} \tag{e}$$

Presupunând că în A_1 punctul material părăseşte suprafața cilindrică, se impun următoarele condiții: $\theta = \alpha$, $N = 0$ şi $v = v_1$, deci relațiile (d) şi (e) se scriu:

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2Rg(1-\cos\alpha) + v_0^2} \\ 0 = mg(3\cos\alpha - 2) - \frac{mv_0^2}{R} \end{cases} \tag{f}$$

obținându-se:

$$\cos\alpha = \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg}; \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2Rg + v_0^2}{3}} \tag{g}$$

Întrucât se impune condiția: $0 < \cos\alpha = \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg} \le 1$,

rezultă: $v_0 \le \sqrt{Rg}$ (h)

Aceasta reprezintă condiția ca punctul material să nu părăsească suprafața cilindrică încă din punctul A_0.

Determinarea vitezei v_1 aplicând teorema de variație a energiei cinetice. Aceasta se scrie:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \tag{i}$$

unde: $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$; $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$;

$$L_{0-1} = \int_{0-1} (\bar{G} + \bar{N}) \cdot d\bar{r} = \int_{0-1} G\,R\sin\theta d\theta = -GR\cos\theta \Big|_0^\alpha = GR(1-\cos\alpha) \tag{j}$$

sau (vezi fig. 9.3.b):

$$L_{A0-A1} = L_{A0-B} + L_{B-A1} = L_{A0-B} + 0 = mg(A_0O - BO) = mgR(1-\cos\alpha)$$

Aceasta semnifică faptul că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs de punctul material, forța de greutate fiind o forță conservativă.

Înlocuind în (i) rezultă viteza punctului când părăseşte suprafața cilindrică:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg(1-\cos\alpha)}$$

9.4. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe o suprafață cilindrică interioară de rază R, fără frecare* $(\mu = 0)$*, pornind din* A_0 *cu viteza inițială* v_o *(fig. 9.4.)*

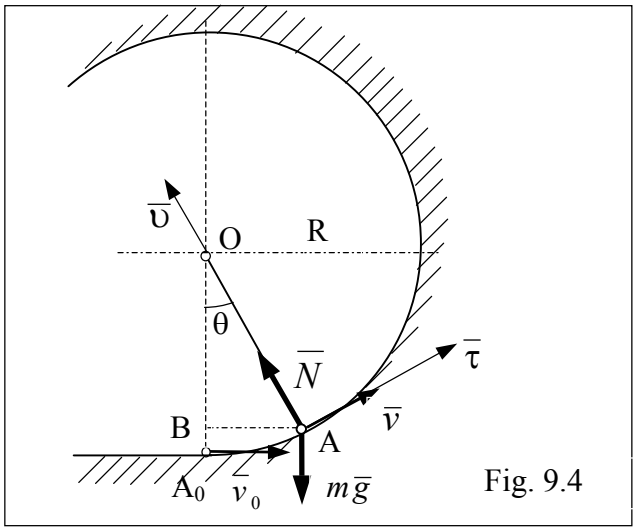


Fig. 9.4

Se cere *să se studieze mişcarea detemînând viteza şi rteacţiunea din punctul A atât din ecuația de mișcare cât şi din teorema de variației a energiei cinetice.*

Rezolvare

Se alege sistemul de axe natural cu originea în punctul curent A, ca în fig. 9.3.b. Ecuația vectorială de mișcare a punctului material pe suprafața cilindrică interioară se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = -mg\,sin\,\theta, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = -mg\,cos\,\theta + N \end{cases} \tag{b}$$

Înlocuind: $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta}$

în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta} = g\ sin\,\theta \qquad sau: \qquad vdv = -Rg\ sin\,\theta\, d\theta$$

Prin integrare se obține : $\dfrac{v^2}{2} = Rg\,cos\,\theta + C$ (c)

Introducând condițiile inițiale: $\theta(0)=0,\ v(0)=v_0$, se obține constanta de integrare: $C = \dfrac{v_0^2}{2} - Rg$,

Prin urmare legea de mișcare a punctului se scrie:

$$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 - cos\,\theta)} \tag{d}$$

Utilizând şi a doua ecuație (b) se obține legea de variație a reacțiunii normale:

$$N(\theta) = mg(3cos\,\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R} \tag{e}$$

Teorema de variație a energiei cinetice se scrie: $E_A - E_{A_0} = L_{A_0A}$ (f)

unde : $E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ (g)

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A}(\overline{G} + \overline{N})\cdot d\overline{r} = \int_{A_0A} F^{\tau}\cdot ds = \int_0^{\theta}(-Gsin\varphi)R\,d\varphi = mgR\cos\varphi\Big|_0^{\theta} = -mgR(1-cos\theta)$$

sau: $L_{A0-A} = L_{A0-B} + L_{B-A} = L_{A0-B} + 0 = mg(A_0O - BO) = mgR(1-cos\theta)$ (h)

Aceasta semnifică faptul că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs de punctul material, forța de greutate fiind o forță conservativă.

Înlocuind (g) şi (h) în (f) se obține:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgR(1-cos\theta) \quad (i)$$

obținându-se aceeaşi expresie a legii de mişcare (d) :

$$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-cos\theta)}. \quad (j)$$

Observații:

- Din expresia vitezei rezultă că pentru $v_0 \le \sqrt{2Rg}$ punctul material parcurge un arc de cerc având unghiul $\theta \le 90^0$, după care se întoarce pe acelaşi drum (pe suprafața cilindrică) ;
- Pentru valori ale lui v_0 cuprinse între: $\sqrt{2Rg} < v_0 < \sqrt{5Rg}$, reacțiunea N se anulează pentru valori ale unghiului: $90^0 \le \theta \le 180^0$, adică punctul material se desprinde de pe suprafața cilindrică şi cade în aer;
- Pentru $v_0 \ge \sqrt{5Rg}$ rezultă atât *v>0* cât şi *N>0*, deci punctul material nu se desprinde de pe suprafața cilindrică şi îşi continuă mişcarea tot timpul pe suprafața cilindrică.

9.5. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe o suprafață cilindrică interioară de rază R, şi unghi* α *fără frecare* $(\mu = 0)$*, pornind din* A_0 *cu viteza inițială* v_o *(fig. 9.5.)*

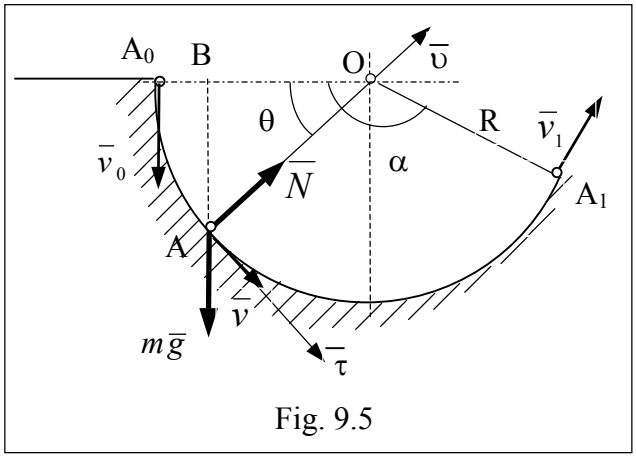


Fig. 9.5

Se cere *să se studieze mişcarea detemінând viteza în* A_1 (v_1) *atât din ecuația de mişcare cât şi din teorema de variației a energiei cinetice.*

Rezolvare

Se alege sistemul de axe natural cu originea în A, ca în fig. 9.5.b. Ecuația vectorială de mişcare a

punctului material pe suprafața cilindrică interioară se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\cos\theta, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = -mg\sin\theta + N \end{cases} \tag{b}$$

Înlocuind: $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta}$ şi $\rho=R$ (condiția geometrică) în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta} = g\cos\theta \qquad sau: \qquad vdv = Rg\cos\theta d\theta$$

Prin integrare se obține : $\dfrac{v^2}{2} = Rg\sin\theta + C$ (c)

Introducând condițiile inițiale: $\theta(0)=0,\ v(0)=v_0$ se obține constanta de integrare: $C = \dfrac{v_0^2}{2}$, prin urmare legea de mişcare a punctului se scrie:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg\sin\theta} \tag{d}$$

Utilizând şi a doua ecuație (b) se obține legea de variație a reacțiunii :

$$N = 3mg\sin\theta + \frac{mv_0^2}{R} \tag{e}$$

În punctul A_1 viteza punctului şi reacțiunea normală sunt:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg\sin\alpha}\,, \qquad N_1 = 3mg\sin\alpha + \frac{mv_0^2}{R} \tag{f}$$

Teorema de variație a energiei cinetice între pozițiile A_0 şi A se scrie:

$$E_A - E_{A_0} = L_{A_0A}$$

unde energia cinetică pentru cele două poziții se scrie:

$$E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{g}$$

şi lucrul mecanic efectuat asupra punctului între A_0 şi A:

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A}(\overline{G} + \overline{N})\cdot d\overline{r} = \int_{A_0A} F^{\tau}\cdot ds = \int_0^{\theta}(Gcos\varphi)R\,d\varphi = mgR\sin\varphi\Big|_0^{\theta} = mgR\sin\theta$$

sau $L_{A_0A} = L_{A_0B} + L_{BA} = 0 + mg\cdot AB = mgR\sin\theta$ (h)

Înlocuind în (f) se obține: $\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = mgR\sin\theta$, rezultând aceeaşi expresia (d) a legii de mişcare: $v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg\sin\theta}$ (i)

9.6. ***Se consideră*** *un punct material de masă m, care este lansat în sus pe direcţie verticală cu viteza iniţială* $v_{A_0} = v_0$. ***Se cere*** *legea de mişcare şi determinarea înălţimii maxime la care ajunge în următoarele trei cazuri:*

1) când asupra punctului acţionează numai forţa de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$

2) când asupra punctului acţionează atât forţa de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$ *cât şi forţa de rezistenţă a aerului de forma* $\overline{R} = -km\overline{v}$.

3) când asupra punctului acţionează atât forţa de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$ *cât şi forţa de rezistenţă a aerului* $\overline{R} = -kmv^2\dfrac{\overline{v}}{v}$.

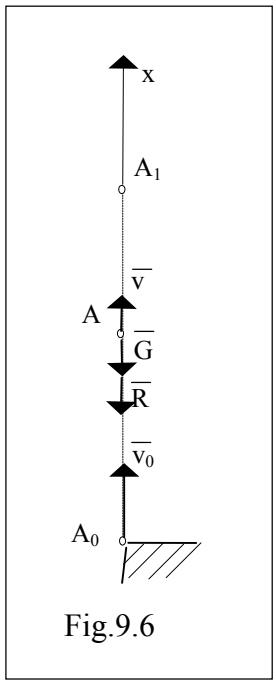


Fig.9.6

Rezolvare:

1) Într-o poziţie intermediară pe A_0A_1, ecuaţia vectorială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \qquad \text{(a)}$$

care proiectată pe axa verticală A_0x se scrie: $\ddot{x} = -g$.

Integrând succesiv de două ori avem;

$$\dot{x} = -gt + C_1, \qquad x = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \qquad \text{(b)}$$

Punând condiţiile la momentul iniţal *(t = 0): x(0) = 0,* $\dot{x}(0) = v_0$ se obţine:

$C_1 = v_1$, $C_2 = 0$, iar legile de mişcare pentru viteza şi deplasare sunt:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \qquad \text{(c)}$$

$$v = -gt + v_0$$

Eliminând timpul t se obţine viteza *v* în funcţie de deplasarea x:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gx} \qquad \text{(d)}$$

În punctul de înălţime maximă A_1 avem:

$v_{A_1} = v_1 = 0$, $x_{A_1} = h$, iar din (d) rezultă:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - R \qquad \text{(e)}$$

2). Într-o poziţie intermediară pe A_0A_1 ecuaţia vectorială se scrie: $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - km\vec{v}$, care proiectată pe axa A_0x conduce la ecuaţia diferenţială neomogenă: $\ddot{x} + k\dot{x} = -g$ a cărei soluţie generală are forma:

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t \qquad \text{(f)}$$

şi derivata $\dot{x} = v = -kC_2 e^{-kt} - \dfrac{g}{k}$ (g)

Punând condițiile inițiale: *x(0) = 0*, $\dot{x}(0) = v_0$ se obțin constantele de integrare: $C_1 = -C_2 = \dfrac{kv_0 + g}{k^2}$, care introduse în relațiile (f) şi (g) conduc la:

$$\begin{cases} x = \dfrac{kv_0 + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \dfrac{g}{k}t \\ v = \dot{x} = \dfrac{kv_0 + g}{k}e^{-kt} - \dfrac{g}{k} \end{cases} \tag{h}$$

Înălțimea maximă $x_{A1} = h$ se obține pentru $v = 0 \Rightarrow t_{A_1} = t^*$:

$$t^* = \frac{1}{k} ln\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right) \quad \text{şi} \quad h = \frac{v_0}{k}\left[1 - \frac{g}{kv_1} ln\left(1 + \frac{kv_1}{g}\right)\right] \tag{i}$$

3) Într-o poziție intermediară pe A_0A_1, ecuația de mişcare vectorială se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} - kmv^2 \frac{\bar{v}}{v} \tag{j}$$

care proiectată pe A_0x ne conduce la ecuația diferențială:

$$\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2 \tag{k}$$

unde înlocuind: $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$, $\dot{x} = v$, avem:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(g + kv^2\right) \Rightarrow \frac{dv}{g/k + v^2} = -kdt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g/k}} arctg \frac{v}{\sqrt{g/k}} = -kt + C \tag{l}$$

Punând condițiile inițiale la *t =0: v(0) =v_0* se obține :

$$C = \frac{1}{\sqrt{g/k}} arctg \frac{v_0}{\sqrt{g/k}}$$

care înlocuită în (l) se obține timpul t în funcție de viteză:

$$t = \frac{arctg(v_0\sqrt{g/k}) - arctg(v\sqrt{g/k})}{\sqrt{kg}} \tag{m}$$

Dacă în ecuația (k) se fac substituțiile:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x(t)), \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

se obține:

$$v\frac{dv}{dx} = -\left(g + kv^2\right), \quad \frac{vdv}{g + kv^2} = -dx \Rightarrow \quad \frac{1}{2k} ln\left(g + kv^2\right) = -x + C \tag{n}$$

Din condițiile inițiale la *t = 0: x(0) = 0, v(0) = v_0* se obține:

$C = \dfrac{1}{2k} ln\left(g + kv_0^2\right)$ de unde rezultă: $x = \dfrac{1}{2k} ln \dfrac{g + kv_0^2}{g + kv^2}$ (o)

În A_1 avem: $v = v_{A_1} = 0$, $x_{A_1} = h$

şi rezultă: $h = \dfrac{1}{2k} ln\left(1 + \dfrac{kv_0^2}{g}\right)$ (p)

9.7. ***Se consideră*** *un punct material de masă m, care este lansat în câmp gravitațional cu viteza inițială* $\overline{v}_o$ *a cărei direcție face cu planul orizontal unghiul* α. ***Se cere*** *legea de mişcare şi determinarea înălțimii maximă la care ajunge în următoarele două cazuri:*

a) când se neglijează rezistența aerului - asupra punctului acționează numai forța de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$

b) când nu se neglijează rezistența aerului - asupra punctului acționează atât forța de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$ *cât şi o forță de rezistență de forma* $\overline{R} = -km\overline{v}$.

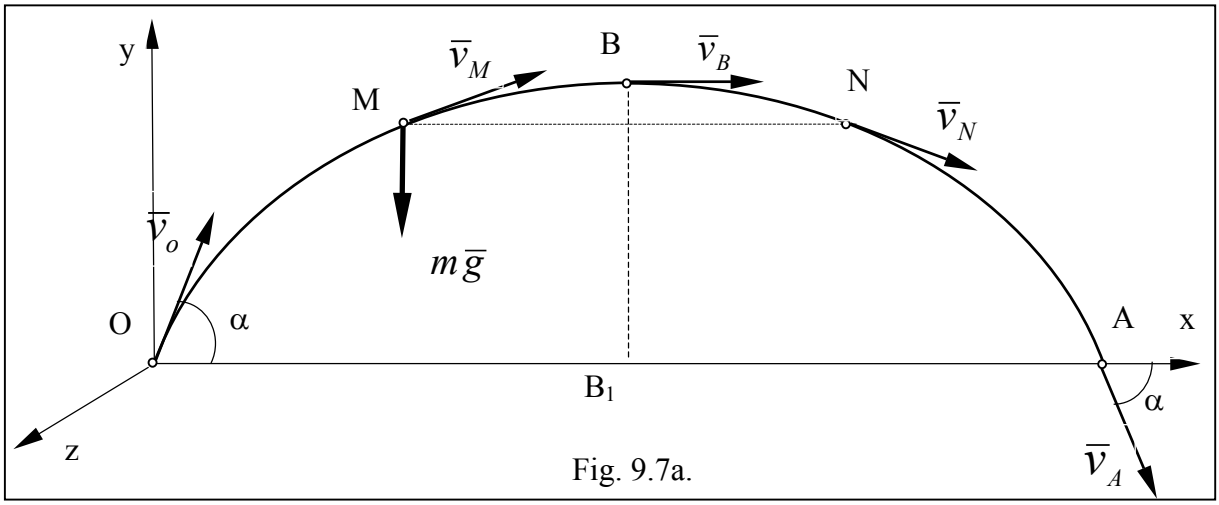


Fig. 9.7a.

Rezolvare

a. Mişcarea în aer când se neglijează rezistența aerului

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie: $\overline{F} = \overline{G} = m\overline{g}$ (a)

sau $m\ddot{\overline{r}} = m\overline{g}$ *sau* $\ddot{\overline{r}} = \overline{g}.$ (b)

scrisă sub forma proiecțiilor pe cele trei axe conduce la :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0 \tag{c}$$

Dacă se integrează succesiv în raport cu timpul, ecuațiile diferențiale (c) se obține soluția generală:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = C_1, \qquad \dot{y} = -gt + C_2, \qquad \dot{z} = C_3 \\ &x = C_1 t + C_4, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_5, \quad z = C_3 t + C_6 \end{aligned} \tag{d}$$

Condițiile inițiale privind poziția şi viteza la momentul *t = 0* sunt:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0 = 0, \qquad y(0) = y_0 = 0, \qquad z(0) = z_0 = 0 \\ &v_{0x} = \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha, \qquad v_{0z} = \dot{z}(0) = 0 \end{aligned} \tag{e}$$

Introducând condițiile (e) în soluțiile generale (d) se obține:

$$\begin{aligned} &0 = 0 + C_1, \qquad 0 = 0 + 0 + C_5, \qquad 0 = 0 + C_6 \\ &v_0 \cos\alpha = C_1, \qquad v_0 \sin\alpha = 0 + C_2, \qquad 0 = C_3 \end{aligned} \tag{f}$$

care conduc la:

$C_1 = v_0 \cos\alpha, \qquad C_2 = v_0 \sin\alpha, \qquad C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$ (g)

Introducând valorile (g) în (d) se obține soluția particulară căutată:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin\alpha)t, \qquad z = 0 \tag{h}$$

Ecuația $z = 0$ arată că traiectoria descrisă de punctul material este situată în planul vertical (Oxy) care conține vectorul $\bar{v}_0$.

Eliminând timpul din ecuațiile (h) se găseşte ecuația traietoriei sub formă explicită ce reprezintă o parabolă cu axa de simetrie verticală:

$$y = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x \cdot tg\alpha. \tag{i}$$

Din relația (h) se deduc, prin derivare, relațiile:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha; \qquad \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha, \qquad \dot{z} = 0. \tag{j}$$

deci:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \tag{k}$$

Elementele caracteristice ale mişcării sunt:

- distanța $x_A = OA$ dintre punctul de lansare O şi punctul A unde traiectoria întâlneşte din nou axa Ox, numită *bătaie*, se obține din ecuația (i) pentru :

$$y_A = 0, \text{ rezultă:} \qquad OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{j}$$

OA devine maximă pentru $\sin 2\alpha = 1$, adică $\alpha = 45^0$ $(OA)_{max} = v_0^2 / g$

- *înălțimea maximă* atinsă de punctul material se obține din condiția:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}2x + tg\alpha = 0 \tag{k}$$

de unde se deduce : $x_B = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. (l)

Se observă că $x_{B_1} = OB_1 = \dfrac{OA}{2}$, datorită proprietăților de simetrie ale parabolei.Ordonata punctului B (sau înălțimea maximă) se obține înlocuind (k) în (i):

$$y_{max} = B_1B = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{m}$$

$$(B_1B)_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Înălțimea maximă depinde de viteza v_0 şi de unghiul α, ca şi bătaia, atingând valoarea maximă pentru $\sin^2\alpha = 1$, adică $\alpha = 90^0$:

b. Mişcarea în aer când nu se neglijează rezistența aerului

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{R} \qquad \text{(n)}$$

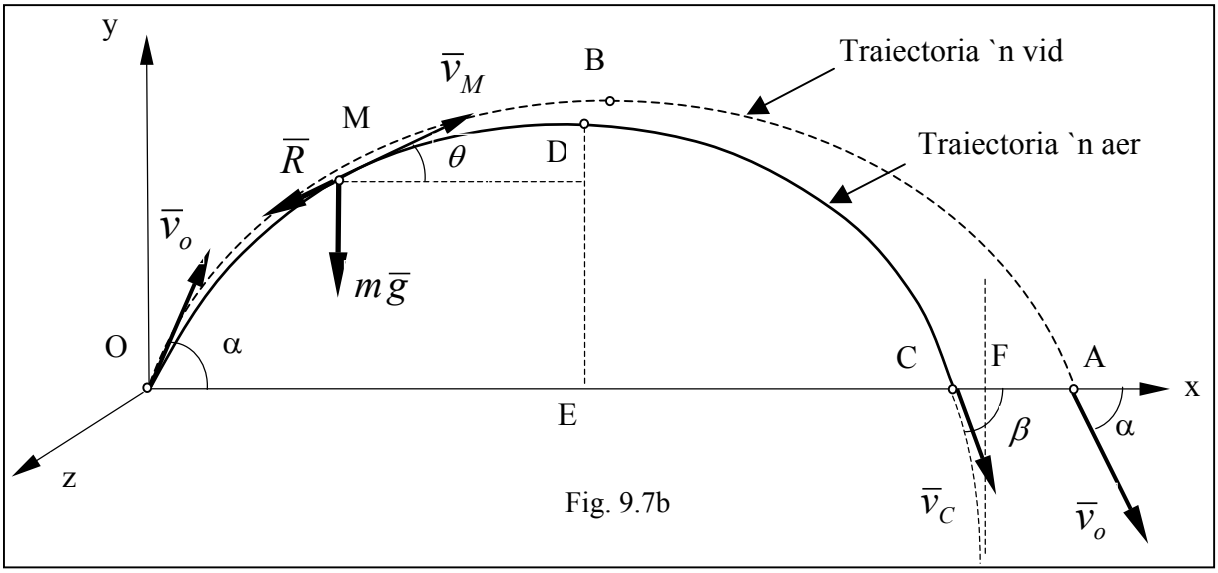


Fig. 9.7b

Întrucât forța de rezistență a aerului este de forma: $\bar{R} = -km\bar{v}$, descompunând $\bar{R}$ în componentele sale după axele de coordonate:

$$R_x = -km\,\dot{x}; \qquad R_y = -km\,\dot{y}; \qquad R_z = 0 \qquad \text{(o)}$$

atunci ecuațiile diferențiale ale mişcării în proiecții pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = -kmx && \ddot{x} + k\dot{x} = 0 \\ &m\ddot{y} = -kmy - mg \quad sau && \ddot{y} + k\ \dot{y} = -g \\ &m\ddot{z} = 0 && \ddot{z} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(p)}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \qquad y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \qquad z = C_5 + C_6 t \qquad \text{(q)}$$

iar prin derivare rezultă vitezele după cele trei direcții:

$$\dot{x} = -kC_2 e^{-kt}; \qquad \dot{y} = -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \qquad \dot{z} = C_6 \qquad \text{(r)}$$

Condițiile inițiale (poziția şi viteza punctului pentru *t=0)* sunt :

$$\begin{aligned} &x(0) = 0 && y(0) = 0 && z(0) = 0 \\ &\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, && \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha. && \dot{z}(0) = 0. \end{aligned} \qquad \text{(s)}$$

care dacă se introduc în ecuațiile (q) şi (r) se obțin constantele de integrare:

$$\begin{aligned} &C_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{k};\ C_2 = -\frac{v_0 \cos\alpha}{k};\ C_3 = \frac{g + kv_0 \sin\alpha}{k^2}; \\ &C_4 = -\frac{g + kv_0 \sin\alpha}{k^2},\ \ C_5 = C_6 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(t)}$$

Ecuațiile (q) devin:

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right);$$

$$y = \frac{g + kv_0 \sin\alpha}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t; \qquad \text{(u)}$$

$$z = 0$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (u) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = x \cdot tg\alpha + \frac{gx}{kv_0 \cos\alpha} + \frac{g}{k}\, ln\left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos\alpha}\right). \qquad \text{(v)}$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când $t \to \infty$ în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}. \qquad \text{(w)}$$

Prin derivarea relațiilor (8.64) se deduc componentele vitezei:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha\, e^{-kt}; \qquad \dot{y} = \frac{g + kv_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \qquad \dot{z} = 0 \qquad \text{(x)}$$

Punând condiția $\dot{y} = 0$, se găseşte punctul de înălțime maximă D al traiectoriei. Deci timpul necesar deplasării din O în D este:

$$t_D = \frac{1}{k} ln\, \frac{g + kv_0 \sin\alpha}{g}. \qquad \text{(y)}$$

Înlocuind în expresia (u) se obține înălțimea maximă a traiectoriei şi abscisa corespunzătoare acestui punct:

$$y_{max} = y_D = \frac{v_0 \sin\alpha}{k} - \frac{g}{k^2} ln \frac{g + kv_o \sin\alpha}{g} \qquad \text{(z)}$$

$$x_D = x_E = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g + kv_0 \sin\alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2\left(g + kv_0 \sin\alpha\right)}.$$

9.8. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează fără frecare* $(\mu = 0)$ *pe conturul circular A_OA_1, de rază $R=CA_0=CA_1$ cu viteză inițială v_o (fig.9.8). După ce parcurge acest drum cu unghiul la centru* $\alpha = \pi/2$, *continuă deplasarea în aer A_1A_2 ($OA_1=h$).* ***Se cere:***

1) *Să se studieze mişcarea pe A_0A_1, folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*
2) *Să se studieze mişcarea pe porțiunea A_1A_2, în două variante de acționare a forțelor de rezistență a aerului: a)* $\overline{R} = 0$; *b)* $\overline{R} = -km\overline{v}$

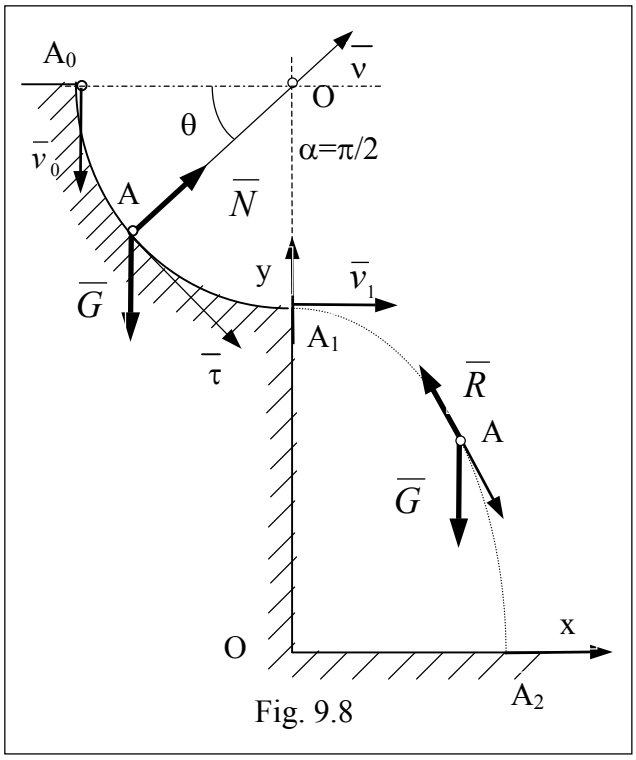


Fig. 9.8

Rezolvare

1) Mişcarea pe drumul A_1A_2:

Se alege sistemul de axe natural cu originea în A, ca în fig. 9.8. Ecuația vectorială de mişcare a punctului material se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad \text{(a)}$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\cos\theta, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = -mg\sin\theta + N \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Întrucât: $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta}$

ecuațiile (b) devin:

$$\begin{cases} vdv = gR\cos\theta\, d\theta \\ m\dfrac{v^2}{R} = -mg\sin\theta + N \end{cases} \qquad \text{(b')}$$

Prin integrare se obține : $v = \sqrt{2Rg\sin\theta + v_0^2}$ (c)

Din a doua ecuație (b') se obține legea de variație a reacțiunii normale:

$$N = 3mg\sin\theta + \frac{mv_0^2}{R} \qquad \text{(d)}$$

În punctul A_1 viteza punctului şi reacțiunea normală sunt:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg\sin(\pi/2)} = \sqrt{v_0^2 + 2Rg} \qquad \text{(e)}$$

$$N_1 = 3mg + \frac{mv_0^2}{R}$$

Teorema de variație a energiei cinetice între pozițiile A_0 şi A se scrie:

$$E_A - E_{A_0} = L_{A_0A} \qquad \text{(f)}$$

unde : $E_{A_0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A}(\bar{G} + \bar{N})\cdot d\bar{r} = \int_{A_0A} F^{\tau}\cdot ds = \int_0^{\theta}(G\cos\varphi)R\,d\varphi = mgR\sin\varphi\Big|_0^{\theta} = mgR\sin\theta$$

sau (vezi fig.9.8): $L_{A0-A} = L_{A0-B} + L_{B-A} = 0 + L_{B-A} = mgR\sin\theta$

Înlocuind în (f) se obține legea de mişcare (d) :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR\sin\theta \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg\sin\theta}$$

2.a. Pentru studiul mişcării pe A_1A_2 în absența rezistenței aerului, se alege sistemul de axe Oxy ca în fig. 9.8, şi se scriu succesiv relațiile:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} \qquad sau \qquad \ddot{\bar{r}} = \bar{g}. \tag{g}$$

care se scriu sub forma ecuațiilor diferențiale, care integrate dau:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_3 \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_4 \end{cases} \tag{h}$$

Condițiile inițiale în A_1 privind poziția şi viteza la momentul $t = 0$ sunt:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0 = 0, \qquad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_1, \\ &y(0) = h, \qquad\quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \tag{i}$$

Se obține sistemul de ecuații şi soluțiile :

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_3 \\ h = 0 + 0 + C_4 \\ v_1 = C_1 \\ 0 = 0 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = h \end{cases} \tag{j}$$

Soluțiile ecuațiilor mişcării sunt:

$$\begin{cases} x = v_1 t = \left(\sqrt{v_0^2 + 2Rg}\right)t \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + h \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg} \\ \dot{y} = -gt \end{cases} \tag{k}$$

Traiectoria mişcării este o parabolă:

$$y = -\frac{g}{2v_1^2}x^2 + h\,, \tag{l}$$

care are vârful în A_1 şi intersectează axa Ox în punctual A_2 de abscisă:

$$x_{A2} = \sqrt{\frac{2hv_1^2}{g}} = \sqrt{\frac{2h(v_0^2 + 2Rg)}{g}}$$

la momentul t_1 dat de : $t_1 = \dfrac{x_{A2}}{v_1} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (m)

Dcei viteza punctului în A_2 este:

$$v_{A_2} = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} = \sqrt{v_0^2 + 2g(R+h)} \tag{n}$$

2.b. Pentru studiul mişcării pe A_1A_2, în ipoteza că rezistența aerului este de forma $\bar{R} = -km\bar{v}$, ecuațiile de mişcare conduc la:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} - km\bar{v} \qquad sau \qquad \ddot{\bar{r}} = \bar{g} - k\bar{v} \tag{o}$$

ecuațiile diferențiale ale mişcării în proiecții pe cele două axe sunt:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g \end{cases} \tag{p}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \\ y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \dfrac{g}{k}t; \end{cases} \tag{q}$$

prin derivare rezultă vitezele

$$\dot{x} = -kC_2 e^{-kt}; \quad \dot{y} = -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \tag{r}$$

Condițiile inițiale (poziția şi viteza punctului în A_1) sunt :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \dot{x}(0) = v_1 \\ y(0) &= h \qquad \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \tag{s}$$

care dacă se introduc în ecuațiile (q) şi (r) se obțin constantele de integrare: $C_1 = -C_2 = -\dfrac{v_1}{k}, \quad C_3 = h + \dfrac{g}{k^2}, \quad C_4 = -\dfrac{g}{k^2}$

Ecuațiile (q) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2Rg}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right); \\ y &= \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t + h; \end{aligned} \tag{t}$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (8.64) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = \frac{gx}{kv_1} + \frac{g}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_1}\right) + h \tag{u}$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când $t \to \infty$ în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_1}{k}. \tag{v}$$

Prin derivarea relațiilor (8.64) se deduc componentele vitezei:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_1 e^{-kt}; \\ v_y &= \dot{y} = \frac{g + kv_1}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}; \end{aligned} \tag{w}$$

9.9. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează cu frecare* $(\mu \neq 0)$ *pe drumul* $A_OA_1 = l$, *cu viteză inițială* v_o. *După ce parcurge fără frecare, drumul pe arcul de cerc* A_1A_2 *(de rază R), părăseşte cercul şi continuă deplasarea în aer(fig. 9.9).* ***Se cere:***

1) Să se studieze mişcarea pe A_0A_1, *deteminâdu-se viteza în* A_1 (V_1), *folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*

2) Să se studieze mişcarea pe porțiunea A_1A_2, *determinându-se unghiul la centru* α *şi viteza în punctul* A_2 *unde punctul se desprinde de cerc.*

Rezolvare:

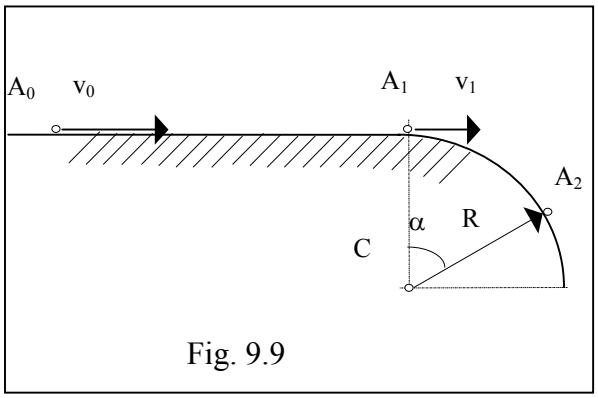


Fig. 9.9

1) Ecuația vectorială de mişcare pe A_0A_1 se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{T} \qquad \text{(a)}$$

care proiectată pe axele x şi y:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \\ m\ddot{y} = -mg + N \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

la care se asociază:

$y = 0 (\Rightarrow \ddot{y} = 0)$, condiția geometrică şi $T = \mu N$, condiția fizică (de frecare).

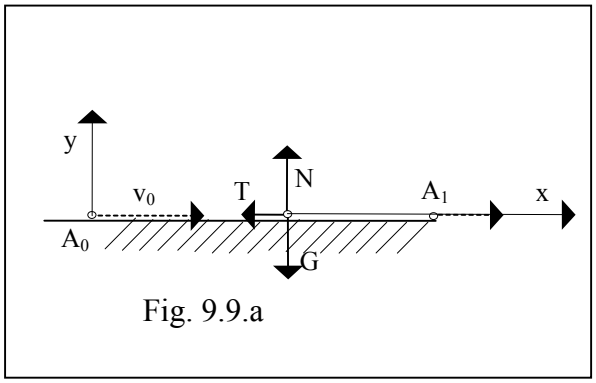


Fig. 9.9.a

Prin urmare, din a doua ecuație (b) avem: $N = mg \Rightarrow T = \mu mg$

Înlocuind pe T în ecuația primă din (b) aceasta devine:

$$\ddot{x} = -\mu g \Rightarrow \dot{x} = -\mu g t + C_1 \Rightarrow x = -\mu g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Introducând condițiile inițiale $\left(t = 0 \Rightarrow x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0\right)$ se obține:

$C_1 = v_0$, $C_2 = 0$

şi legile de mişcare ale spațiului şi vitezei:

$$x = -\mu g \frac{t^2}{2} + v_0 t, \qquad v = -\mu g t + v_0 \qquad \text{(c)}$$

sau eliminând timpul legea viteză-spațiu:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x} \qquad \text{(d)}$$

Pentru $x = x_{A_1} = L$ se obține viteza în A_1 : $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g L}$

Iar din teorema energiei (şi condiția $v_0 > \sqrt{2\mu gL}$): $E_{A_1} - E_{A_0} = L_{A_0A_1}$

adică: $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -T \cdot L = -\mu mgL$ şi se obține aceeaşi expresie pentru v_1:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gL}$$

2) Ecuația vectorială privind mişcarea pe arcul de cerc A_1A_2 (Fig. 9.9.a) este:

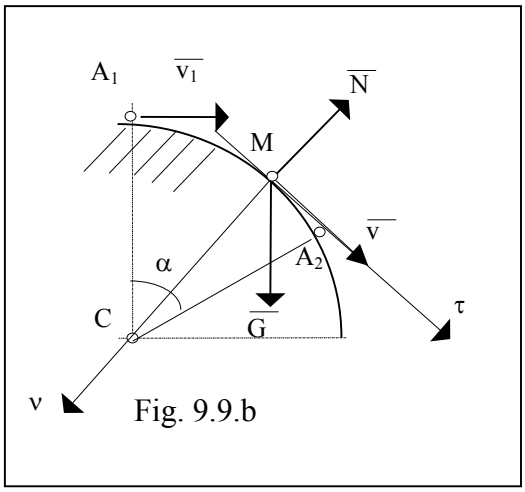


Fig. 9.9.b

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{G} + \bar{N} \qquad \text{(e)}$$

care proiectată pe axele naturale se scriu:

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\,sin\,\theta \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = mg\,cos\,\theta - N \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Prima ecuație din (f) $\dot{v} = g\,sin\,\theta$,

unde $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$, devine:

$vdv = Rg\,sin\,\theta d\theta$ care integrată $\Rightarrow \frac{v^2}{2} = -Rg\,cos\,\theta + C_1$ iar din condițiile inițiale *(t = 0, θ (0) = 0, v(0) = v_1)* se obține $C = \frac{v_1^2}{2} + Rg$ şi prin urmare legea viteză-spațiu se scrie: $v = \sqrt{2Rg(1 - cos\,\theta) + v_1^2}$ (g)

Înlocuind (g) şi $\rho = R$ în ecuația a doua din (f) se obține:

$$N = mg(3cos\,\theta - 2) - \frac{mv_1^2}{R} \qquad \text{(h)}$$

Formulele (g) şi (h) reprezintă viteza şi reacțiunea nominală într-un punctoarecare de pe arcul A_1A_2. Presupunând că în A_2 mobilul părăseşte cercul, se impun condițiile: $\theta = \alpha \Rightarrow N = 0$ şi $v = v_{A_2} = v_2$, iar (g) şi (h) se scriu:

$$\begin{cases} v_2 = \sqrt{2Rg(1 - cos\,\alpha) + v_1^2} \\ 0 = mg(3cos\,\alpha - 2) - \dfrac{mv_1^2}{R} \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

obținându-se:

$$cos\,\alpha = \frac{v_1^2 + 2Rg}{3Rg} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Rg + v_1^2}{3}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Rg + v_0^2 - 2\mu gL}{3}} \qquad \text{(j)}$$

Observație: Dacă se impune condiția: $0 < cos\,\alpha \le 1$

Rezultă limitele vitezei v_0 : $\sqrt{2\mu gl} < v_0 < \sqrt{Rg + 2\mu gl}$ (k)

9.10 ***Se consideră*** *un punct material de masă m, care se deplasează pe interiorul sfertului de cerc A_0A_1, de rază R, fără frecare* $(\mu = 0)$*, cu viteza inițială* $v_{A_0} = v_0$*, după care continuă mișcarea pe verticală în aer.* ***Se cer:***

1) *Mișcarea pe A_0A_1 folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.*
2) *Mișcarea pe verticală A_1A_2, determinând înălțimea maximă la care ajunge mobilul de masă m, în cazurile:*

   a) asupra punctului acționează numai forța de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$

   b) asupra punctului acționează atât forța de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$ *cât și forța de rezistență a aerului având forma* $\overline{R} = -km\overline{v}$.

   c) asupra punctului acționează atât forța de greutate $\overline{G} = m\overline{g}$ *cât și forța de rezistență a aerului având forma* $\overline{R} = -kmv^2\dfrac{\overline{v}}{v}$.

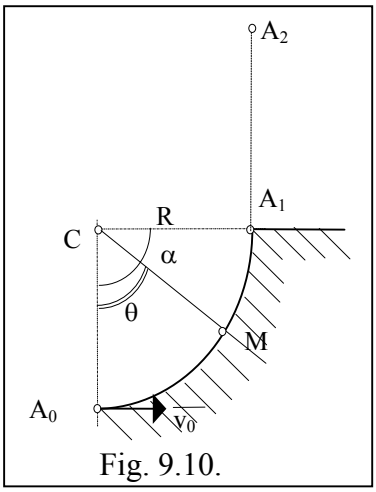


Fig. 9.10.

Rezolvare:

1) Ecuația vectorială de mișcare pe $\overline{A_0A_1}$ este:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad (a)$$

care proiectată pe axele naturale conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = -mg\sin\theta, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = -mg\cos\theta + N \end{cases} \qquad (b)$$

Ținând seama de condiția geometrică $\rho = R$ și de faptul că:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$$

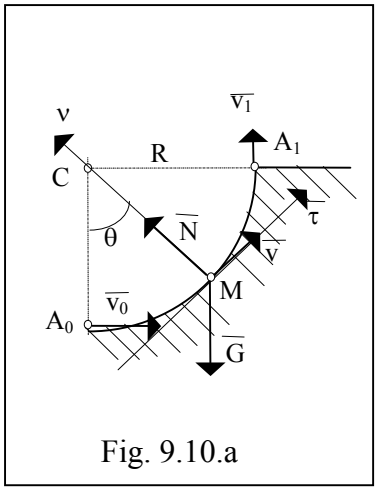


Fig. 9.10.a

Sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta} = -g\sin\theta \\ m\dfrac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N \end{cases} \qquad (c)$$

Prima ecuație se scrie:

$$vdv = -Rg\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = Rg\cos\theta + C$$

unde constanta de integrare C se determină din ecuațiile inițiale:

$$t = 0,\ v(0) = v_o,\ \theta(0) = 0: \quad C = \frac{v^2}{2} - Rg$$

prin urmare: $v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg(cos\,\theta - 1)}$ (d)

Utilizând şi a doua ecuație a sistemului se obține reacțiunea normală:

$$N = mg(3cos\,\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R} \quad \text{(e)}$$

Atât v cât şi N au fost obținute pentru o poziție oarecare a mobilului, având unghiul $\theta = \theta(t)$.

Pentru a găsi viteza în A_1 se înlocuieşte în (d) $\theta = \frac{\pi}{2}$ şi se obține:

$$v_{A_1} = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Rg} \quad \text{(f)}$$

Această viteză se poate obține şi utilizând teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_{A_1} - E_{A_0} = L_{A_0A_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgR$$

de unde se obține pentru v_1 aceeaşi expresie (f) pentru v_1 : $v_{A_1} = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Rg}$

2) a. Studiul mişcării pe verticală în aer fără rezistența aerului

Într-o poziție intermediară pe A_1A_2, ecuația vectorială de mişcare este:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}, \qquad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}$$

care proiectată pe axa verticală A_1x se scrie: $\ddot{x} = -g$.

Integrând succesiv de două ori avem;

$$\dot{x} = -gt + C_1, \qquad x = -g\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2$$

Punând condițiile inițale $t = 0,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_1$

se obține: $C_1 = v_1,\ C_2 = 0,$

iar legile de mişcare pentru viteza şi deplasare sunt:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_1t, \qquad v = -gt + v_1 \quad \text{(g)}$$

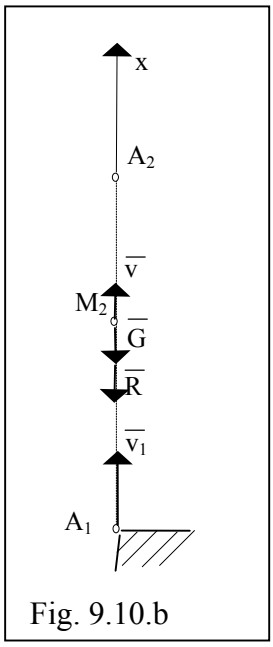


Fig. 9.10.b

Eliminând timpul t din cele două ecuații (g) se obține : $v = \sqrt{v_1^2 - 2gx}$

Expresia lui v_1 este dată de (f). În punctul de înălțime maximă A_2 avem:

$$v_{A_2} = v_2 = 0, \qquad x_{A_2} = x_{max} = h,$$

iar din (6) rezultă:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - R \quad \text{(h)}$$

2) b. Studiul mişcării pe verticală în aer cu rezistența aerului $\bar{R} = -km\bar{v}$

Într-o poziție intermediară pe A_1A_2 ecuația vectorială se scrie: $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + km\vec{v}$, care proiectată pe axa A_1x conduce la ecuația diferențială neomogenă:

$$\ddot{x} + k\dot{x} = -g \tag{i}$$

a cărei soluție generală are forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t \\ \dot{x} &= v = -C_2 k - \frac{g}{k} \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

Punând condițiile inițiale: *x(0) = 0,* $\dot{x}(0) = v_1$ se obțin constantele de integrare: $C_1 = -C_2 = \dfrac{kv_1 + g}{k^2}$

care introduse în (9) se obține :

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{v_1}{k} + \dfrac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \dfrac{g}{k}t \\ v = \dot{x} = \left(v_1 + \dfrac{g}{k}\right)e^{-kt} - \dfrac{g}{k} \end{cases} \tag{k}$$

Înălțimea maximă $x_{A_2} = h_{max}$ se obține pentru $v_{A_2} = 0$, *pentru* $t_{A_2} = t^*$:

$$t^* = \frac{1}{k} ln\left(1 + \frac{kv_1}{g}\right) \qquad \text{deci} \qquad h = \frac{v_0}{k}\left[1 - \frac{g}{kv_1} ln\left(1 + \frac{kv_1}{g}\right)\right] \tag{l}$$

2) c. Studiul mişcării pe verticală în aer cu rezistența aerului $\bar{R} = -km\bar{v}^2$

Într-o poziție intermediară pe A_1A_2, ecuația de mişcare vectorială se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + km\bar{v}^2 \tag{m}$$

care proiectată pe axa A_1x ne conduce la ecuația diferențială: $\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2$

unde înlocuind $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$ *si* $\dot{x} = v$, avem:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(g + kv^2\right) \Rightarrow \frac{dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}} arctg \frac{v}{\sqrt{\frac{g}{k}}} = -kt + C \tag{n}$$

Punând condițiile inițiale la *t =0: v(0) =*v_1 se obține :

$$C = \frac{1}{\sqrt{g/k}} arctg \frac{v_1}{\sqrt{g/k}} \tag{o}$$

Înlocuind (o) în (n) se obține legea de mişcare sub forma unei funcții a timpului *t* depinzând de viteza *v*:

$$t = \frac{arctg(v_1\sqrt{g/k}) - arctg(v\sqrt{g/k})}{\sqrt{kg}} \qquad \text{(p)}$$

Dacă în ecuația (n) se fac substituțiile:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x(t)), \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

se obține ecuația diferențială:

$$v\frac{dv}{dx} = -(g + kv^2), \qquad \frac{vdv}{g + kv^2} = -dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2k}\ln(g + kv^2) = -x + C \qquad \text{(q)}$$

Din condițiile inițiale la $t = 0$: $x(0) = 0$, $v(0) = v_1$ se obține: $C = \frac{1}{2k} ln(g + kv_1^2)$

Deci legea de mişcare sub forma unei funcții a deplasării *x* de viteza *v* se scrie:

$$x = \frac{1}{2k} ln\frac{g + kv_1^2}{g + kv^2} \qquad \text{(r)}$$

În A_2 avem: $v = v_{A2} = 0, \quad x_{A2} = h$ şi rezultă înălțimea maximă:

$$h = \frac{1}{2k} ln\left(1 + \frac{kv_1^2}{g}\right) \qquad \text{(p)}$$

9.11. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul α, cu frecare $(\mu \neq 0)$, pornind din A_0 cu viteza inițială v_o După ce ajunge în A_1 îşi continuă drumul în aer.(fig. 9.11.a).* ***Se cere:***

1) *Să se determine legea de mişcare pe A_0A_1, folosind atât ecuația de mişcare cât şi teorema de variației a energiei cinetice.*
2) *Să se determine legea de mişcare în aer pe A_1A_2, în cele două cazuri:*
   a) *când se neglijează rezistența aerului ;*
   b) *când rezistența aerului are forma $\overline{R} = -km\overline{v}$.*

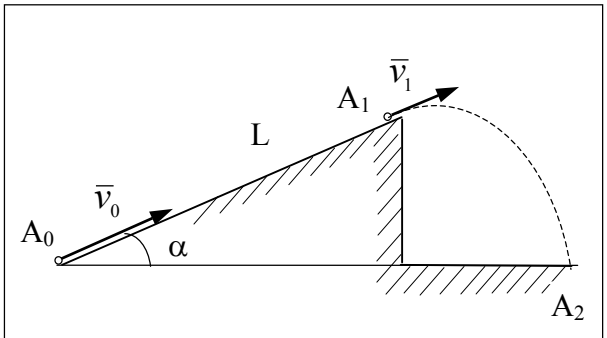


Fig. 9.11.a

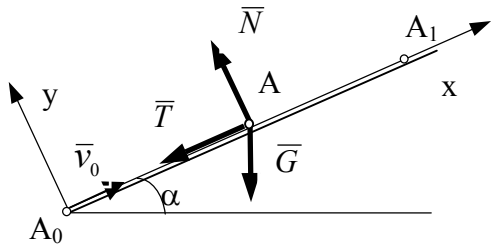


Fig. 9.11.b

Rezolvare:

1. În cazul urcării pe planul înclinat, se alege sistemul de axe *Oxy* cu originea în A_0 şi axa *Ox* pe direcţia planului în sensul mişcării, ca în *fig. 9.2.b* şi se eliberează punctul de legături introducându-se forţele de legătură $\overline{N}$ *si* $\overline{T}$ $(T = \mu N)$ (conform axiomei legăturilor).

   Ecuaţia diferenţială a mişcării pe A_0A_1, în proiecţii pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

   Ecuaţia traiectoriei (condiţia geometrică) este: $y = 0$ $(\dot{y} = 0;\ \ddot{y} = 0)$

   Condiţia fizică a frecării este: $T = \mu N$, care introduse în (a) conduc la:

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ \ddot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

   Integrând succesiv de două ori ultima ecuaţie (b), se obţine:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t + C_1, \\ x &= -\frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

   Dacă se introduc condiţiile la momentul iniţial $t = 0$:

   $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, rezultă constantele de integrare: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$.

   Legea de mişcare este dată de:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0t - \frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 \\ v(t) &= \dot{x}(t) = v_0 - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt. \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

   Eliminând parametrul t din ecuaţiile (d) se obţine:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2xg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \qquad \text{(e)}$$

   În punctul A_1 avem: $x_{A1} = L$ şi viteza devine:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \qquad \text{(f)}$$

   Acelaşi rezultat se obţine dacă se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice: $E_1 - E_0 = L_{0-1}$

   unde: $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

$$L_{0-1} = \int_{0-1} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{0-1} \left[(-G\sin\alpha - T)\bar{i} + (-G\cos\alpha + N)\bar{j}\right] \cdot (dx\bar{i})$$

$$L_{0-1} = (-G\sin\alpha - T)L = -mgL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

   Înlocuind, obţinem aceeaşi relaţie (f) pentru v_1.

2) a. Pentru studiul mişcării pe A_1A_2 în absența rezistenței aerului, se alege sistemul de axe Oxy ca în fig. 9.8, şi se scriu succesiv relațiile:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} \qquad sau \qquad \ddot{\bar{r}} = \bar{g}. \tag{g}$$

care se scriu sub forma ecuațiilor diferențiale, care integrate succesiv conduc la:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3 \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_4 \end{cases} \tag{h}$$

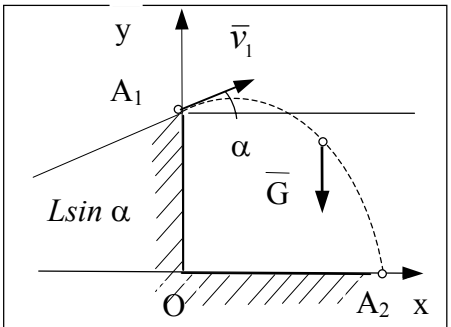


Fig. 9.11.c

Condițiile inițiale în A_1 privind poziția şi viteza la momentul $t = 0$ sunt:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0 = 0, && v_{0x} = \dot{x}(0) = v_1 \cos\alpha \\ &y(0) = L\sin\alpha, && v_{0y} = \dot{y}(0) = 0\sin\alpha \end{aligned} \tag{i}$$

Se obține sistemul de ecuații şi soluțiile corespunzătoare pentru constantele de integrare C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_3 \\ L\sin\alpha = 0 + 0 + C_4 \\ v_1\cos\alpha = C_1 \\ v_1\sin\alpha = 0 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_1\cos\alpha \\ C_2 = v_1\sin\alpha \\ C_3 = 0 \\ C_4 = L\sin\alpha \end{cases} \tag{j}$$

Soluțiile ecuațiilor mişcării sunt:

$$\begin{cases} x = v_1\cos\alpha \cdot t \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_1\sin\alpha \cdot t + L\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = \dot{x} = v_1\cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = -gt + v_1\sin\alpha \end{cases} \tag{k}$$

Eliminând timpul din primele două ecuații rezultă traiectoria mişcării:

$$y = -\frac{g}{2(v_1\cos\alpha)^2}x^2 + tg\alpha \cdot x + L\sin\alpha, \tag{l}$$

care este o parabolă (fig. 9.11.c) având vârful în V ($v_y=0$):

$$x_V = \frac{v_1}{g}tg\alpha; \qquad y_V = \frac{v_1^2}{2g}\sin^2\alpha\left(\frac{2}{\cos\alpha} - 1\right) + L\sin\alpha$$

şi care intersectează axa Ox în punctual A_2 ($y=0$) la momentul t_1 dat de :

$$t_1 = \frac{1}{g}\left[v_1\sin\alpha + \sqrt{v_1^2\sin^2\alpha + 2Lg\sin\alpha}\right] \tag{m}$$

Deci viteza punctului în A_2 este: $v_{A_2} = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} = \sqrt{v_1^2 + 2Lg\sin\alpha}$

2) b. Pentru studiul mişcării pe A_1A_2, în ipoteza că rezistența aerului este de forma $\overline{R} = -km\overline{v}$, ecuațiile de mişcare conduc la:

$$m\ddot{\overline{r}} = m\overline{g} - km\overline{v} \qquad sau \qquad \ddot{\overline{r}} = \overline{g} - k\overline{v} \tag{n}$$

ecuațiile diferențiale ale mişcării în proiecții pe cele două axe sunt:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g \end{cases} \tag{p}$$

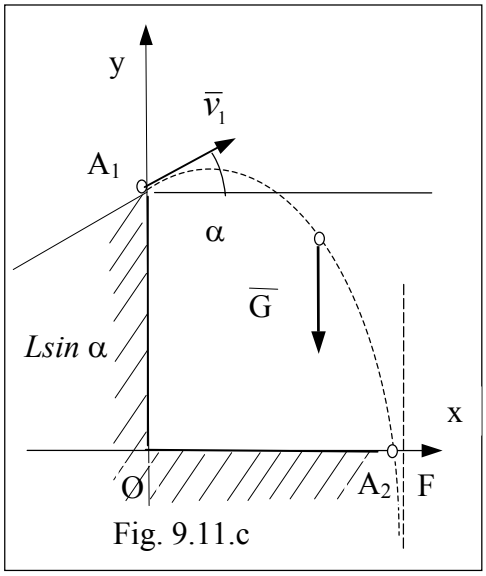


Fig. 9.11.c

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \\ y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \dfrac{g}{k}t; \end{cases} \tag{q}$$

Prin derivare rezultă vitezele

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kC_2 e^{-kt}; \\ \dot{y} &= -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \end{aligned} \tag{r}$$

Condițiile inițiale (poziția şi viteza punctului în A_1) sunt aceleaşi ca la punctul precedent:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, & v_{0x} &= \dot{x}(0) = v_1 \cos\alpha \\ y(0) &= L\sin\alpha, & v_{0y} &= \dot{y}(0) = 0\sin\alpha \end{aligned} \tag{s}$$

Dacă se introduc în ecuațiile (q) şi (r) se obțin constantele de integrare:

$$C_1 = -C_2 = -\frac{v_1 \cos\alpha}{k}, \qquad C_3 = \frac{v_1 k \sin\alpha + g}{k^2} + L\sin\alpha,$$

$$C_4 = -\frac{v_1 k \sin\alpha + g}{k^2}$$

Ecuațiile (q) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1 \cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \\ y &= \frac{v_1 k \cos\alpha + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t + L\sin\alpha; \end{aligned} \tag{t}$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (t) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = \left(1 + \frac{g}{v_1 k \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{k}\, ln\left(1 - \frac{kx}{v_1 \cos\alpha}\right) + L\sin\alpha \tag{u}$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când $t \to \infty$ în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_1 \cos\alpha}{k}. \tag{v}$$

Prin derivarea relațiilor (t) se deduc componentele vitezei:

$$v_x = \dot{x} = v_1 \cos\alpha\, e^{-kt};$$
$$v_y = \dot{y} = \frac{v_1 k \cos\alpha + g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \qquad \text{(w)}$$

Deci viteza punctului se scrie: $v = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ (x)

9.12. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează în planul vertical xOy sub acţiunea unei forţe orizontale proporţională cu depărtarea faţă de originea O a sistemului de axe considerat ($\bar{F} = kx\bar{i}$) . La momentul iniţial (t=0) porneşte din punctul A_0 situat pe axa Oy, OA_0=h, cu viteza iniţială v_o paraelă cu Ox (fig.9.12).*

Se cere *să se studieze mişcarea pe A_0A_1 , distanţa OA_1 unde cade punctul, precum şi viteza de impact în A_1.*

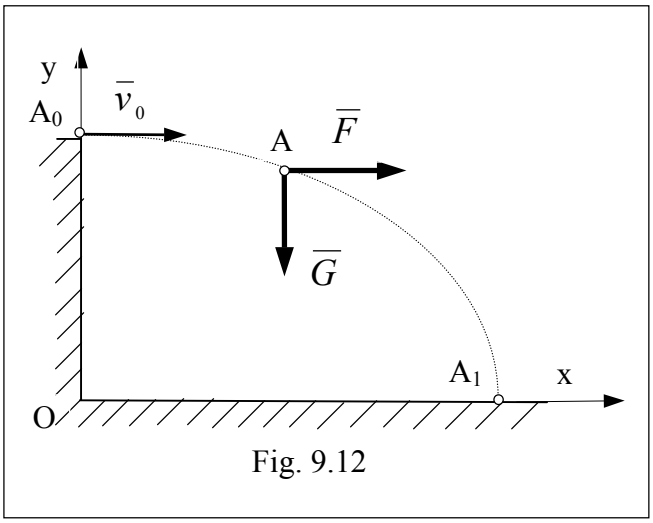


Fig. 9.12

Rezolvare

Pentru studiul mişcării în raport cu sistemul de axe Oxy din fig. 9.12, ecuaţiile de mişcare se scriu:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{F} \quad sau$$
$$\ddot{\bar{r}} = -g\bar{j} + \frac{k}{m}x\bar{i} \qquad \text{(a)}$$

sau sub forma ecuaţiilor diferenţiale:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{k}{m}x \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

unde dac se notează: $\omega^2 = k/m$ conduce la:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t} \\ \dot{y} = -gt + C_3 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Condiţiile iniţiale în A_0 (poziţia şi viteza la momentul $t = 0$) sunt:

$$x(0) = x_0 = 0, \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_0,$$
$$y(0) = h, \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0, \qquad \text{(d)}$$

Se obţine sistemul de ecuaţii şi constantele C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ h = 0 + 0 + C_4 \\ v_0 = \omega(C_1 - C_2) \\ 0 = 0 + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 = \dfrac{v_0}{2\omega} \\ C_3 = 0 \\ C_4 = h \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Soluţiile particulare ale ecuaţiilor mişcării sunt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}} \cdot sh\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + h \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cdot ch\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ \dot{y} = -gt \end{cases} \tag{f}$$

Eliminând parametrul timp t din ecuațiile (f) se obține ecuația traiectoriei:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{2(h-y)}{g}} \\ x = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}} \cdot sh\left(\sqrt{\dfrac{2k(h-y)}{mg}}\right) \end{cases} \tag{g}$$

Punând condiția *y=0* se obține din (g) distanța OA_1 unde cade punctul:

$$\begin{cases} x_{A1} = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}} \cdot sh\left(\sqrt{\dfrac{2kh}{mg}}\right) \end{cases} \tag{h}$$

Viteza într-un punct oarecare A al traiectoriei este:

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cdot ch^2\left(\sqrt{k/m} \cdot t\right) + g^2t^2} \end{cases} \tag{i}$$

Punând condiția *y=0* se obține din (f) timpul $t_1 = \sqrt{2h/g}$ după care punctul ajunge în A_1. Înlocuind în expresia (i) se obține viteza de impact :

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{v_0^2 \cdot ch^2\left(\sqrt{\dfrac{2kh}{mg}}\right) + 2gh} \end{cases} \tag{j}$$

9.13. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează în planul vertical xOy fiind atras de originea O de o forță proporțională cu depărtarea față de originea O a sistemului de axe considerat ($\overline{F} = -mk^2\overline{OA}$) . La momentul inițial (t=0) pornește din punctul A_0 situat pe axa Oy OA_0=h, cu viteza inițială v_o paraelă cu Ox (fig.9.13).* ***Se cere*** *să se studieze mișcarea pe A_0A_1 , distanța OA_1 unde cade punctul, precum și viteza de impact în A_1.*

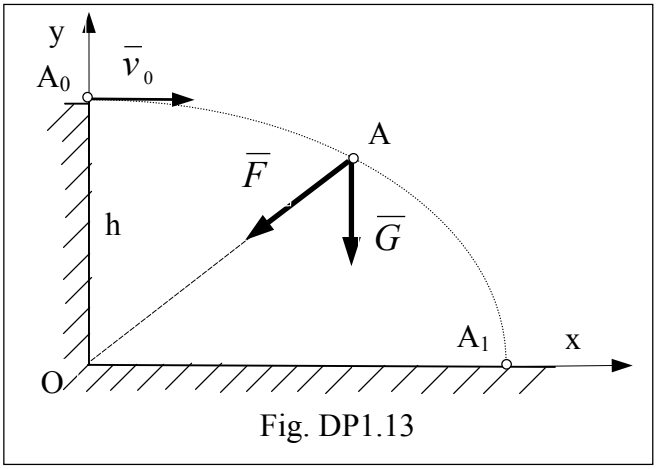


Fig. DP1.13

Rezolvare

Pentru studiul mișcării în raport cu sistemul de axe Oxy din fig. 9.13, ecuațiile de mișcare se scriu:

$$m\ddot{\overline{r}} = m\overline{g} + \overline{F} \quad sau \quad \ddot{\overline{r}} = -g\overline{j} - mk^2x\overline{i} - mk^2y\overline{j} \tag{a}$$

sau sub forma ecuațiilor diferențiale:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = -g \end{cases} \tag{b}$$

având soluții generale de forma:

$$\begin{cases} x = Ae^{ikt} + Be^{-ikt} \\ y = Ce^{ikt} + De^{-ikt} - \dfrac{g}{k^2} \end{cases} \quad sau: \quad \begin{cases} x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \\ y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \dfrac{g}{k^2} \end{cases} \tag{c}$$

respectiv derivatele: $\begin{cases} \dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \\ \dot{y} = -kC_3 \sin kt + kC_4 \cos kt \end{cases}$ (d)

Condițiile inițiale în A_0 (poziția şi viteza la momentul $t = 0$) sunt:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, \quad & v_{0x} &= \dot{x}(0) = v_0, \\ y(0) &= h, & v_{0y} &= \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \tag{e}$$

Se obține sistemul de ecuații şi constantele C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ h = C_3 - \dfrac{g}{k^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = kC_2 \\ 0 = kC_4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{v_0}{k} \end{cases} \quad \begin{cases} C_3 = h + \dfrac{g}{k^2} \\ C_4 = 0 \end{cases} \tag{f}$$

Soluțiile particulare ale ecuațiilor mişcării sunt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{k} \sin kt \\ y = \left(h + \dfrac{g}{k^2} \right) \cos kt - \dfrac{g}{k^2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos kt \\ \dot{y} = -\left(kh + \dfrac{g}{k} \right) \sin kt \end{cases} \tag{g}$$

Eliminând parametrul timp t din ecuațiile (g) se obține ecuația traiectoriei:

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{v_0}{k} \right)^2} + \frac{\left(y + \dfrac{g}{k^2} \right)^2}{\left(h + \dfrac{g}{k^2} \right)^2} = 1 \tag{h}$$

Punând condiția $y=0$ se obține din (h) distanța OA_1 unde cade punctul:

$$\begin{cases} x_{A1} = \dfrac{v_0}{k} \sqrt{1 - \dfrac{g^2}{(k^2 h + g)^2}} \end{cases} \tag{h}$$

Viteza într-un punct oarecare A al traiectoriei este:

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cdot \cos^2 kt + \left(kh + \dfrac{g}{k} \right)^2 \sin^2 kt} \end{cases} \tag{i}$$

Punând condiția $y=0$ se obține din (g) timpul $t_1 = arc \cos \dfrac{g}{g + k^2 h}$, după care punctul ajunge în A_1. Înlocuind în expresia se obține viteza de impact :

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{v_0^2 \cdot \dfrac{g^2}{(g + k^2 h)^2} + (g + k^2 h)(k^2 h^2 - 2gh)} \end{cases} \tag{j}$$

9.14. ***Se consideră*** *o sferă M de de greutate G=mg legată printr-un fir inextensibil de un punct fix A, care descrie o circumferință orizontală, având viteza constantă v_0.* ***Se cere*** *să se determine: tensiunea din fir S, viteza sferei şi timpul T în care aceasta descrie o circumferință completă, dacă se cunoaşte lungimea firului L şi unghiul α dintre fir şi verticala care trece prin A. (fig.9.14).*

Rezolvare

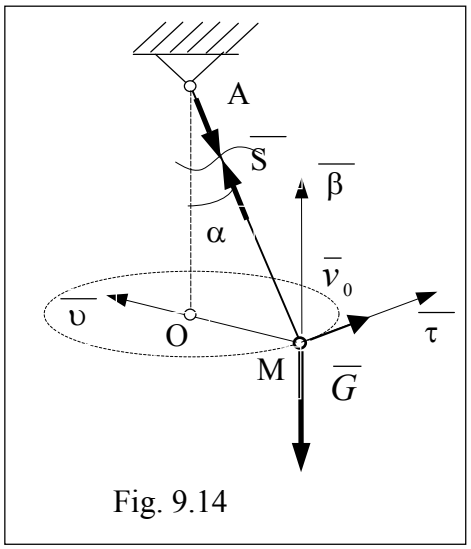


Fig. 9.14

Ecuația vectorială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{S} \qquad (a)$$

Pentru studiul mişcării se priiectează ecuația (a) pe axele sistemului Frenet (naturale) ca în fig. 9.14, sub forma:

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0 \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = S\sin\alpha \\ 0 = S\cos\alpha - mg \end{cases} \qquad (b)$$

Din prima ecuație rezultă $v=v_0=const$

Din ultima ecuație rezultă: $S = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = const.$ (c)

Înlocuind în a doua ecuație raza de curbură $\rho = L\sin\alpha$, se obține:

$$v^2 = \frac{SL\sin^2\alpha}{m} = \frac{Lg\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{sau:}$$

$$v = \sqrt{\frac{Lg\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} \quad (= v_0 = constant) \qquad (d)$$

Perioada mişcării este raportul dintre lungimea cercului *($L\sin\alpha$)* şi viteză:

$$T = \frac{2\pi \cdot L\sin\alpha}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}} \qquad (e)$$

9.15. ***Se consideră*** *un punct material (o bilă) de masă m care pleacă din A_0 în tubul A_0A_3 înclinat cu ungiul α cu viteza inițială v_o , cu frecare $(\mu \neq 0)$. Când ajunge în A_1 atinge capătul unui resort de constantă elastică k, pe care îl comprimă (fig. 9.15.a).* ***Se cere*** *să se determine lungimea de comprimare L, dacă se cunosc: α, μ, k, $a=A_0A_1$*

Rezolvare:

Forțele care acționează pe cele două tronsoane A_0A_1 şi A_1A_2 sunt reprezentate în fig. 9.15. b şi c.

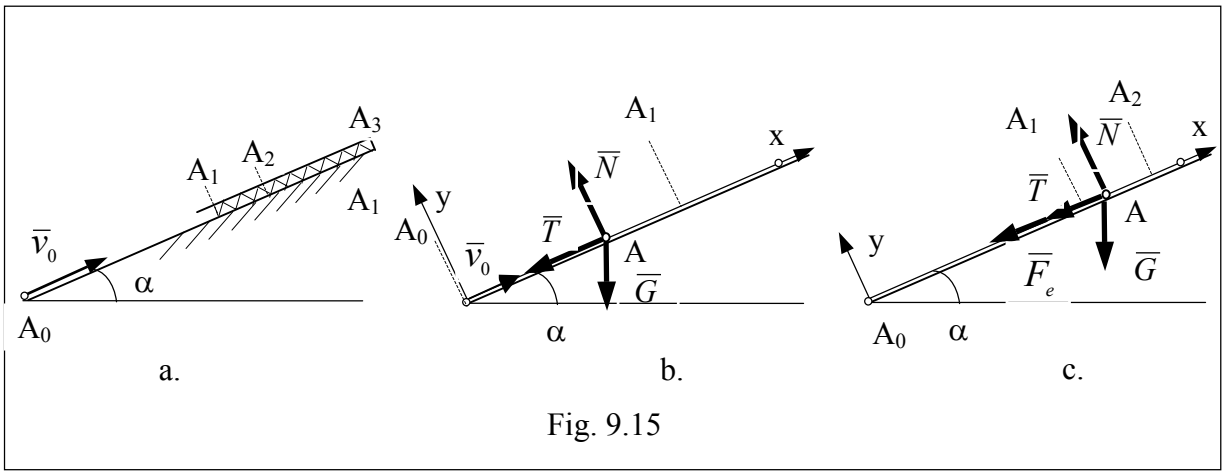


Fig. 9.15

a. Pe primul tronson A_0A_1 se aplică teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \quad , \tag{a}$$

unde: $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, $\quad E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ (b)

$$L_{0-1} = \int_{0-a} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{0-a} \left[\left(-G\sin\alpha - T\right)\overline{i} + \left(-G\cos\alpha + N\right)\overline{j}\right] \cdot \left(dx\overline{i}\right)$$

$$L_{0-1} = \left(-G\sin\alpha - T\right)a$$

Întrucât $T = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, se obține viteza în punctul A_1:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ag(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \tag{c}$$

b. Pe al doilea tronson A_1A_2 se aplică tot teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_2 - E_1 = L_{1-2} \quad ,$$

unde: $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $\quad E_2 = 0$ (d)

$$L_{1-2} = \int_{0-L} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{0-L} \left[\left(-G\sin\alpha - T - F_e\right)\overline{i} + \left(-G\cos\alpha + N\right)\overline{j}\right] \cdot \left(dx\overline{i}\right)$$

unde: $F_e = kx$ iar lucrul mecanic al forței elastice a arcului este

$$dL_e = -F_e dx = -kxdx \quad \Rightarrow \; L_e = -\int_0^L kxdx = -\frac{kL^2}{2}$$

$$L_{1-2} = \left(-G\sin\alpha - T\right)L - \frac{kL^2}{2}$$

Rezultă o ecuație de gradul II în L:

$kL^2 + 2mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)L - mv_1^2 = 0$ având soluția:

$$L = \frac{-mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) + \sqrt{\left[mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]^2 + mkv_1^2}}{k} \tag{e}$$

unde v_1 este dat de relația (c).

9.16. ***Se consideră*** *un punct material de masă m care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul* α *, cu frecare* $(\mu \neq 0)$ *şi rezistenţa aerului de forma* $\overline{R} = -kmgv^2 \dfrac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$*, pornind din* A_0 *cu viteza iniţială* v_o*.* ***Se cere*** *să se determine viteza cu care trece corpul prin poziţia iniţială* A_0 *, la înapoiere.*

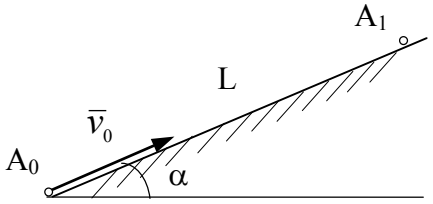


Fig. 9.16.a

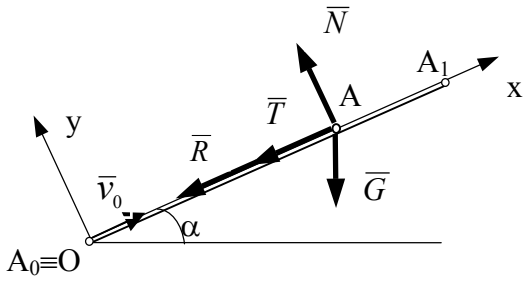


Fig. 9.16.b

Rezolvare:

a) pentru urcare se alege sistemul de axe *Oxy* cu originea în A_0 şi axa *Ox* pe direcţia planului în sensul mişcării, ca în *fig. 9.16.b* şi se eliberează punctul de legături introducându-se forţele de legătură $\overline{N}$ $\overline{R}$ *si* $\overline{T}$ $(T = \mu N)$. Ecuaţia diferenţială a mişcării pe A_0A_1, în proiecţii pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha - T - kmgv^2; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Condiţia geometrică se scrie: $y = 0\ (\dot{y} = 0;\ \ddot{y} = 0)$ (b)

Condiţia fizică a frecării este: $T = \mu N$, (c)

rezultă:
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - kgv^2 \\ N &= mg\cos\alpha \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

Dacă în prima ecuaţie (b) se face substituţia:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad \text{(e)}$$

rezultă o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile:

$$v\frac{dv}{dx} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2) \qquad \text{(f)}$$

sau
$$\frac{d(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2)}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2)} = -2gk\cdot dx \qquad \text{(g)}$$

având soluţia: $\ln(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2) = -2gkx + C$ (h)

Dacă se introduc condiţiile la momentul iniţial *(t = 0) :*

$x\ (0) = 0,\ \ \dot{x}(0) = v_0,$

rezultă constanta de integrare: $C = \ln(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv_0^2)$

Se obține legea de mişcare sub forma:

$$x = \frac{1}{2gk} ln \frac{sin\alpha + \mu cos\alpha + kv_0^2}{sin\alpha + \mu cos\alpha + kv^2} \tag{i}$$

În punctul A_1 avem condițiile: $x_1 = L$ şi $v_1=0$, rezultă

$$L = \frac{1}{2gk} ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{sin\alpha + \mu cos\alpha}\right) \tag{j}$$

b. La întoarcere avem următoarele ecuaţii diferențiale proiectate pe noile axe Ox şi Oy (O≡A_1):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mgsin\alpha - T - kmgv^2; \\ m\ddot{y} &= -mgcos\alpha + N, \end{aligned} \tag{k}$$

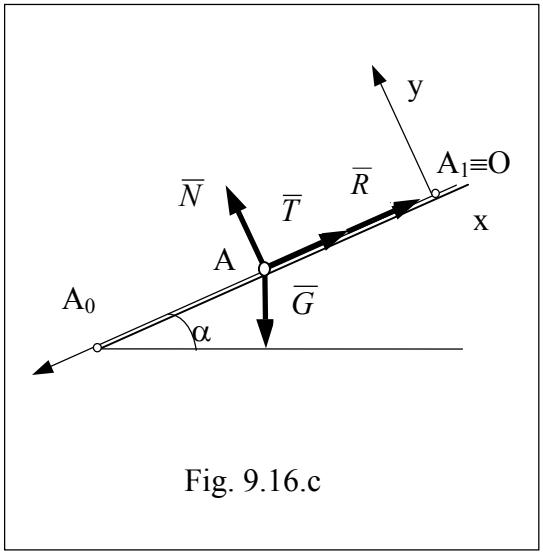


Fig. 9.16.c

Dacă se introduc condiția geometrică: $y = 0\ (\dot{y} = 0;\ \ddot{y} = 0)$ şi condiția fizică a frecării ($T = \mu N$), rezultă :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g(sin\alpha - \mu cos\alpha) - kgv^2 \\ N &= mgcos\alpha \end{aligned} \tag{l}$$

Dacă în prima ecuație (l) se face substituția: $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$,

se obține analog o ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$v\frac{dv}{dx} = g(sin\alpha - \mu cos\alpha - kv^2) \tag{m}$$

având soluția: $ln(kv^2 + \mu cos\alpha - sin\alpha) = -2gkx + C$ (n)

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial $(t = 0)$: $x(0) = 0$, şi $\dot{x}(0) = v_1 = 0$, rezultă constanta de integrare: $C = ln(\mu cos\alpha - sin\alpha)$

Se obține legea de mişcare sub forma:

$$x = \frac{1}{2gk} ln \frac{\mu cos\alpha - sin\alpha}{kv^2 + \mu cos\alpha - sin\alpha} \tag{o}$$

În punctul A_0 vom avea în acest caz condițiile: $x_f = L$ şi $v=v_{0f}$, rezultă

$$L = \frac{1}{2gk} ln \frac{\mu cos\alpha - sin\alpha}{kv_{0f}^2 + \mu cos\alpha - sin\alpha} \tag{p}$$

Egalând cele două expresii obținute pentru L (j) şi (p) se obține v_{0f}:

$$v_{0f} = v_0 \sqrt{\frac{sin\alpha - \mu cos\alpha}{kv_0^2 + \mu cos\alpha + sin\alpha}} \tag{q}$$

CAPITOLUL X
CINEMATICA RIGIDULUI ŞI A SISTEMELOR DE RIGIDE

10.1. ***Se consideră*** *mecanismul format din cinci bare articulate (vezi fig.10.1, unde O_1,O_2, O_3 sunt articulaţii fixe iar A, B, C, D articulaţii mobile).*

Se cunosc*: $O_1A = O_2B = r$; $O_2C = O_3D = R$; $O_1O_2 = O_2O_3 = AB = CD = \ell > R$; viteza unghiulară a manivelei O_1A este $\omega = const$.* ***Se cere*** *să se calculeze şi să se reprezinte grafic viteza şi acceleraţia punctelor A, B, C, D, M, N.*

Rezolvare

Patrulaterele O_1ABO_2 şi O_2CDO_3 rămân tot timpul paralelograme cu laturile O_1O_2 şi O_2O_3 fixe, barele O_1A , O_2B şi O_3D au o mişcare de rotaţie , iar barele AB şi CD o mişcare de translaţie, deoarece rămân tot timpul paralele cu O_1O_2 şi O_2O_3 (fixe)

Avem prin urmare :

$v_A = \omega \cdot O_1A = \omega \cdot r$

$dar\, \omega = const \Rightarrow \varepsilon = 0$

$a_A^{\tau} = \varepsilon \cdot O_1A = 0$

$a_A^{\upsilon} = \omega^2 \cdot O_1A = \omega^2 \cdot r$

$\Rightarrow a_A = a_A^{\upsilon} = \omega^2 \cdot r$

(a)

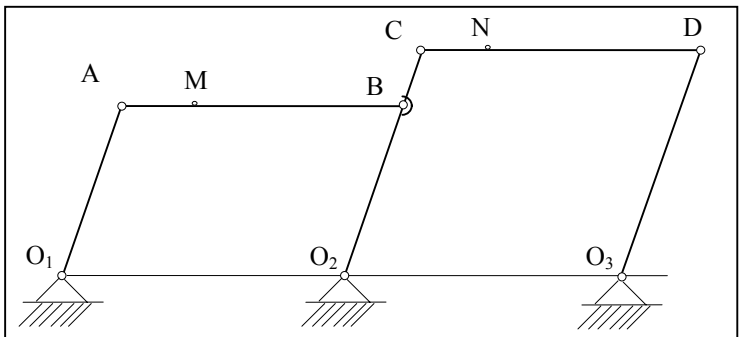


Fig.10.1

Deci :

$v_A = v_B = v_M = \omega \cdot r$

$a_A = a_B = a_M = \omega^2 \cdot r$

(b)

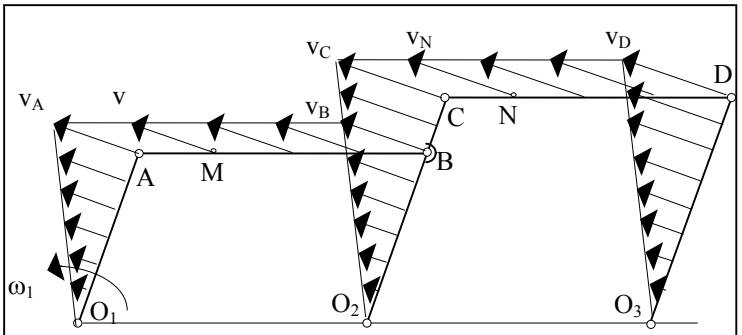


Fig. 10.1.a.

Bara O_2C are aceeaşi viteză unghiulară:

$\omega = const$ ca şi O_1A,

deci:

$v_C = \omega \cdot O_2C = \omega \cdot R$

$a_C = \omega^2 \cdot O_2C = \omega^2 \cdot R$

(c)

Analog, avem :

$v_C = v_D = v_M$

$a_C = a_D = a_M$

(d)

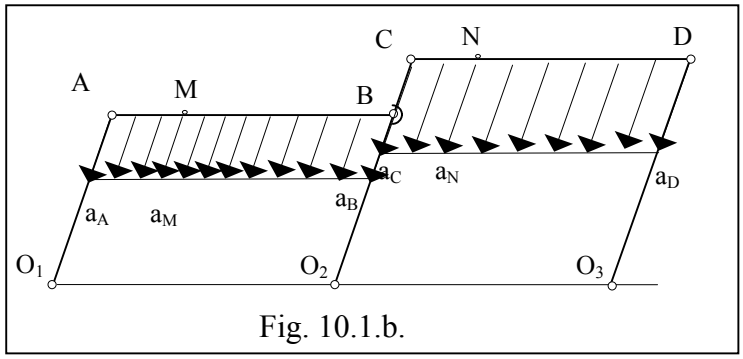


Fig. 10.1.b.

10.2 ***Se consideră*** *un cub de muchie a, care se roteşte în jurul diagonalei principale* OB' *cu viteza unghiulară* $\omega = 2\sqrt{3}\varepsilon_0 t$ *(fig.10.2).*

Se cer*: 1) viteza şi acceleraţia punctului B*

2) vitezele şi acceleraţiile punctelor A, A', C, C', O'

Rezolvare

Se folosesc formulele lui Euler:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad \text{(a)}$$

Se alege sistemul de axe mobil $(Oxyz)$ după muchiile cubului (ca în fig. 10.1).

Întrucât $\bar{v}_0 = 0;\ \ \bar{a}_0 = 0$, relaţia (a) se scrie:

$$\bar{v}_{1B} = \bar{\omega} \times \bar{r}_B;$$

$$\bar{a}_{1B} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_B) = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times \bar{v}_{1B} \qquad \text{(b)}$$

unde:

$$\bar{r}_B = \overline{OB} = a(\bar{i} + \bar{j})$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot vers\overline{OB'} = 2\varepsilon_0 t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \qquad \text{(c)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 2\varepsilon_0(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k});$$

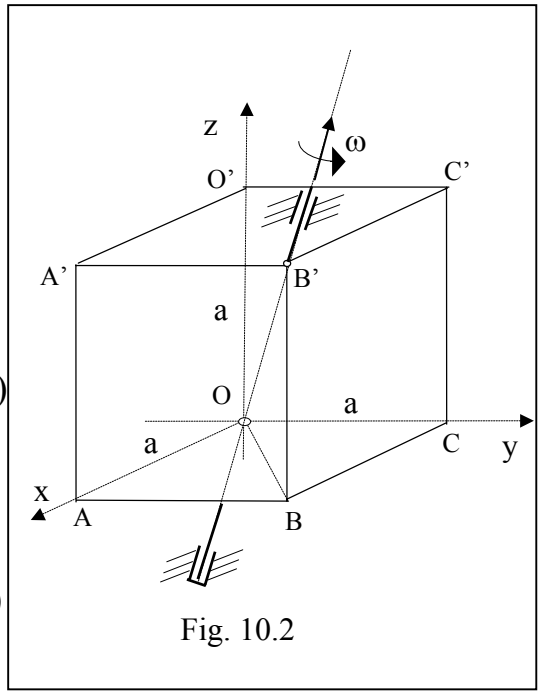


Fig. 10.2

Viteza punctului B:

$$\bar{v}_{1B} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(-\bar{i} + \bar{j}) \Rightarrow v_{1B} = \sqrt{v_{1Bx}^2 + v_{1By}^2 + v_{1Bz}^2} = 2\sqrt{2}a\varepsilon_0 t; \qquad \text{(d)}$$

$$cos(\bar{v}_{1B}, \bar{i}) = \frac{v_{1Bx}}{v_{1B}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad cos(\bar{v}_{1B'}, \bar{j}) = \frac{v_{By}}{v_B} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad cos(\bar{v}_{1B'}, \bar{k}) = 0$$

Acceleraţia punctului B:

$$\bar{a}_{1B} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(e)}$$

$$\bar{a}_{1B} = -2a\varepsilon_0(1 + 2\varepsilon_0 t^2)\bar{i} + 2a\varepsilon_0(1 - 2\varepsilon_0 t^2)\bar{j} + 8a\varepsilon_0^2 t^2 \bar{k}$$

$$a_{1B} = \sqrt{a_{1Bx}^2 + a_{1By}^2 + a_{1Bz}^2};$$

$$cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{i}) = \frac{a_{1Bx}}{a_{1B}}; \quad cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{k}) = \frac{a_{1By}}{a_{1B}}; \quad cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{k}) = \frac{a_{1Bz}}{a_{1B}}.$$

Pentru găsirea vitezei şi acceleraţiei punctelor A, A', C, C', O' se procedează în mod analog: $\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}$; $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_1$, unde vectorii de poziţie ai punctelor specificate au expresiile:

$$\begin{aligned} &\bar{r}_A = \overline{OA} = a\bar{i}; \quad \bar{r}_{A'} = \overline{OA'} = a(\bar{i} + \bar{k}); \quad \bar{r}_C = \overline{OC} = a\bar{j} \\ &\bar{r}_{C'} = \overline{OC'} = a(\bar{j} + \bar{k}); \quad \bar{r}_{O'} = \overline{OO'} = a\bar{k} \end{aligned} \tag{f}$$

Vitezele punctelor specificate se calculează astfel:

$$\bar{v}_{1A} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at\left(\bar{j} - \bar{k}\right); \quad \bar{v}_{1A'} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at\left(\bar{i} - \bar{k}\right)$$

$$\bar{v}_{1C} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at\left(-\bar{i} + \bar{k}\right); \quad \bar{v}_{1C'} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at\left(-\bar{j} + \bar{k}\right) \tag{g}$$

$$\bar{v}_{1O'} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at\left(\bar{i} - \bar{j}\right)$$

Acceleraţiile punctelor specificate se calculează astfel:

$$\bar{a}_{1A} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0\left(\bar{j} - \bar{k}\right) + 4a\varepsilon_0^2 t^2\left(-2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{1A'} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0\left(\bar{i} - \bar{k}\right) + 4a\varepsilon_0^2 t^2\left(-\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{1C} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0\left(-\bar{i} + \bar{k}\right) + 4a\varepsilon_0^2 t^2\left(\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{1C'} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0\left(-\bar{j} + \bar{k}\right) + 4a\varepsilon_0^2 t^2\left(2\bar{i} - j - \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{1O'} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a\varepsilon_0\left(\bar{i} - \bar{j}\right) + 4a\varepsilon_0^2 t^2\left(\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}\right) \tag{h}$$

10.3 ***Se consideră*** *paralalelipipedul dreptunghic având muchiile:* $OA = a,\ OC = 2a,\ OO' = 3a$ *(fig.10.3) care se roteşte în jurul axei* OC' *cu viteza unghiulară* $\omega = \sqrt{13}\varepsilon_0 t$. ***Se cere****: viteza şi acceleraţia punctului* B'.

Rezolvare

Se aleg axele sistemului mobil $(Oxyz)$ după muchiile paralelipipedului dreptunghic (fig.10.3) ; întrucât $\bar{v}_0 = 0;\ \bar{a}_0 = 0$, viteza şi acceleraţia punctului B' se calculează cu formulele:

$$\bar{v}_{1B'} = \bar{\omega} \times \overline{OB}' \ ; \bar{a}_{1B'} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB}' + \bar{\omega} \times \bar{v}_{B'} \qquad (a)$$

Întrucât avem :

$$\overline{OB}' = a\bar{i} + 2a\bar{j} + 3a\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega vers\overline{OC}' = \omega \frac{\overline{OC}'}{\left|\overline{OC}'\right|} = \varepsilon_0 t\left(2\bar{j} + 3\bar{k}\right) \qquad (b)$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \varepsilon_0\left(2\bar{j} + 3\bar{k}\right)$$

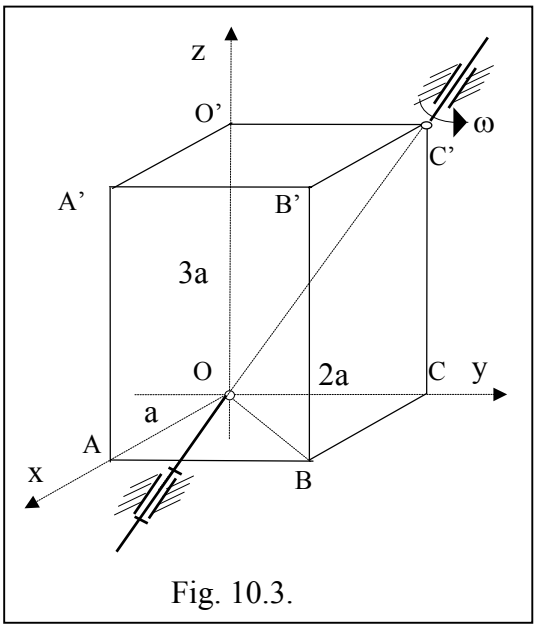


Fig. 10.3.

Relaţia (a) se scrie:

- Pentru viteza punctului B':

$$\bar{v}_{1B'} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \end{vmatrix} \varepsilon_0 t = \varepsilon_0 at\left(3\bar{j} - 2\bar{k}\right) \qquad (c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1B'x} = 0 \\ v_{1B'y} = 3\varepsilon_0 at \\ v_{1B'z} = -2\varepsilon_0 at \end{cases} \Rightarrow v_{1B'} = \sqrt{v_{B'x}^2 + v_{B'y}^2 + v_{B'z}^2} = \sqrt{13}\varepsilon_0 at$$

$$cos\left(\bar{v}_{1B'}, \bar{i}\right) = \frac{v_{1B'x}}{v_{1B'}} = 0;\ cos\left(\bar{v}_{1B'}, \bar{j}\right) = \frac{v_{1B'y}}{v_{1B'}} = \frac{3}{\sqrt{13}};\ cos\left(\bar{v}_{1B'}, \bar{k}\right) = \frac{v_{1B'z}}{v_{1B'}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- Pentru acceleraţia punctului B' :

$$\bar{a}_{1B'} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \varepsilon_0 a + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \varepsilon_0 t \cdot \varepsilon_0 at = -13\varepsilon_0^2 at^2 \bar{i} + \varepsilon_0 a\left(3\bar{j} - 2\bar{k}\right) \qquad (d)$$

$$\Rightarrow a_{1B'} = a\varepsilon_0 \sqrt{13\left(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4\right)}$$

$$cos\left(\bar{a}_{1B'}, \bar{i}\right) = \frac{a_{1B'x}}{a_{1B'}} = \frac{-13\varepsilon_0 t^2}{\sqrt{13\left(1 + 13\varepsilon_0^2 t^2\right)}};\ cos\left(\bar{a}_{1B'}, \bar{j}\right) = \frac{a_{1By}}{a_{1B'}} = \frac{3}{\sqrt{13\left(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4\right)}}$$

$$cos\left(\bar{a}_{1B'}, \bar{k}\right) = \frac{a_{1B'z}}{a_{1B'}} = -\frac{2}{\sqrt{13\left(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4\right)}}$$

Temă: Să se determine vitezele şi acceleraţiile punctelor: *B B' A A' O' C*

10.4 ***Se consideră*** *un şurub având diametrul* $D = 20cm$ *şi pasul* $p = 4mm$. *Şurubul începe să se rotească într-o piuliță, pornind din repaus, cu viteza unghiulară* $\omega = 2t \quad (s^{-1})$. ***Se cere*** *viteza şi accelerația unui punct situat pe periferia şurubului la momentul* $t_1 = 10s$.

Rezolvare:

Mişcarea şurubului este o mişcare elicoidală compusă dintr-o o mişcare de rotație în jurul axului şurubului şi o mişcare de translație dealungul axului:

$$v = \sqrt{v_{tr}^2 + v_{rot}^2}; \qquad unde: \; v_{tr} = v_0 = \frac{p\omega}{2\pi}; \; v_{rot} = R\omega$$
$$a = \sqrt{a_{tr}^2 + a_{rot}^2}; \qquad unde: \; a_{tr} = \frac{p\varepsilon}{2\pi}; \qquad a_{rot} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{a}$$

Prin urmare, vieza şi accelerația unui punct aflat la periferia lui este:

$$v = \omega\sqrt{\frac{p^2}{(2\pi)^2} + R^2}; \qquad a = \sqrt{\left(\frac{p\varepsilon}{2\pi}\right)^2 + R^2\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)} \tag{b}$$

Vieza şi accelerația punctului la momentul $t_1 = 10s$ când avem:

$\omega_1 = 20s^{-1}$, $\varepsilon_1 = 2s^{-2}$, este: $v_1 = 2m/s$ şi $a_1 \approx 40m/s^2$. (c)

10.5 ***Se consideră*** *un şurub având raza exetrioară* R *şi pasul* $p = 4mm$. *Şurubul începe să se rotească într-o piuliță fixă, pornind din repaus, astfel încât deplasarea în lungul axei se face cu o accelerație constantă* a_0. ***Se cer*** *viteza şi accelerația unui punct situat pe periferia şurubului la momentul* t .

Rezolvare:

Mişcarea şurubului este elicoidală (rototranslație) :

- Pentru mişcarea de translație dealungul axului avem:

$$v_{tr} = v_0 = a_0 t$$
$$a_{tr} = a_0 \tag{a}$$

- Pentru mişcare de rotație

$$v_{rot} = R\omega = R \cdot \frac{2\pi}{p} v_0 = \frac{2\pi R a_0 t}{p};$$
$$a^{\,n}_{rot} = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{2\pi}{p} a_0 t\right)^2; \quad a^{\,t}_{rot} = \frac{dv_{rot}}{dt} = \frac{2\pi R a_0}{p} \tag{b}$$

Prin urmare, vieza şi accelerația unui punct aflat la periferia lui este:

$$v = \sqrt{v_{tr}^2 + v_{rot}^2} = a_0 t\sqrt{\left(\frac{2\pi R}{p}\right)^2 + 1};$$
$$a = \sqrt{(a_{tr})^2 + (a^n_{rot})^2 + (a^t_{rot})^2} = a_0\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{p}\right)^2 + R^2\left(\frac{2\pi t}{p}\right)^4} \tag{c}$$

10.6. ***Se consideră*** *o bară OA de lungime ℓ se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe semicercul de rază R, rezemându-se tot timpul în B (fig.10.6.a).* ***Se cunosc*** *viteza de deplasare a punctului O, $v_0 = constant$.* ***Se cer:*** *Ecuaţiile Bazei şi Rostogolitoarei mişcării şi vitezele punctelor A şi B ale barei.*

Rezolvare:

Se duc perpendiculare pe direcțiile vitezelor aplicate în O şi B , intersecția acestor perpendiculare determină centrul instantaneu de rotație (C.I.R), pe care îl notăm cu I . Se aleg axele fixe $O_1x_1y_1$ şi mobile Oxyz ca în figură şi parametrul mişcării unghiul dintre O_1x_1 şi Ox notat cu $\varphi = \varphi(t)$. Pentru determinarea Bazei şi a Rostogolitoarei vom folosi două metode:

a. Metoda geometrică

Proiectând punctul I pe axele fixe ($O_1x_1y_1$) (fig.10.6.b). obținem ecuațiile parametrice ale Bazei:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= O_1D = R\cos 2\varphi \\ \eta_1 &= DI = R\sin 2\varphi \end{aligned} \qquad (a)$$

Eliminând parametrul φ din ecuațiile (a) se obține ecuația explicită a Bazei: $\xi_1^2 + \eta_1^2 = R^2$ care reprezintă un cerc cu centrul în O_1 de rază R.

Proiectând punctul I pe axele mobile (Oxy) (fig. 10.6.b). se obțin ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\begin{aligned} \xi &= OB = 2R\cos\varphi \\ \eta &= IB = 2R\sin\varphi \end{aligned} \qquad (b)$$

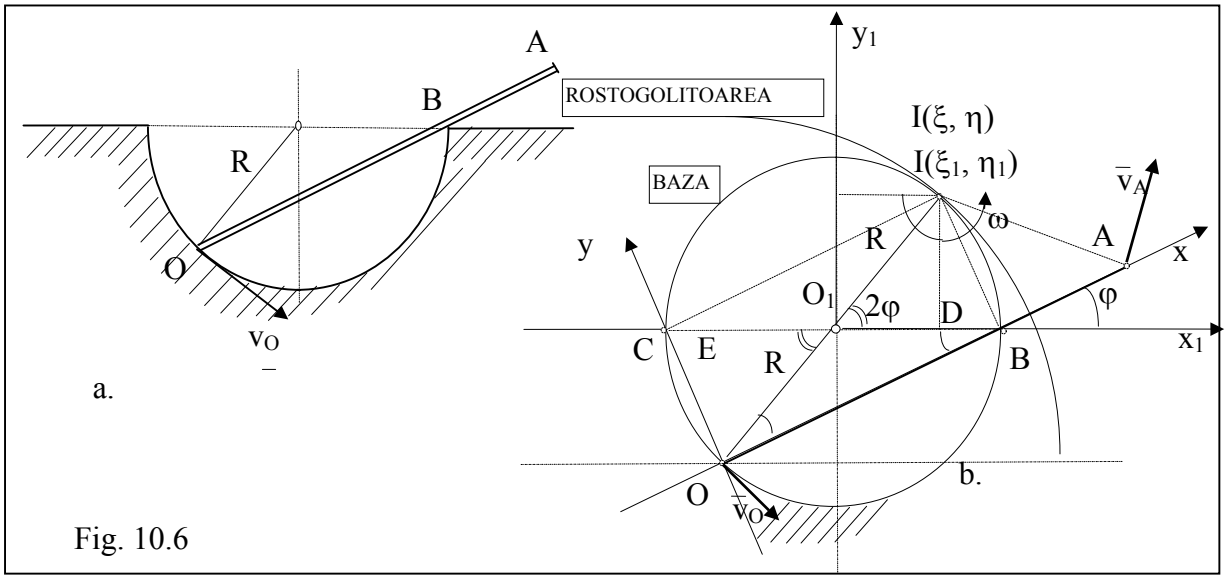


Fig. 10.6

Eliminând parametrul φ din ecuațiile (b) se obține ecuația explicită a Rostogolitoarei: $\xi^2 + \eta^2 = 4R^2$ (c)

şi care reprezintă un cerc cu centrul în O, de rază 2R

b. Metoda grafo-analitică

Se vor folosi ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei şi bazei obținute analitic :

- pentru Rostogolitoare: $\begin{cases}\xi = -v_{0y}/\omega \\ \eta = v_{0x}/\omega\end{cases}$ (d)

- pentru Bază: $\begin{cases}\xi_1 = x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ \eta_1 = y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi\end{cases}$ (e)

Se observă că legea de mişcare a punctului O (originea sistemului mobil) se poate scrie: $s = arcCO = R\cdot 2\varphi$ (f)

Derivând expresia (e) în raport cu timpul , se obține:

$$\dot{s} = 2R\dot{\varphi} \qquad sau \qquad v_0 = 2R\omega \quad \text{adică:} \quad \omega = v_0/2R; \tag{g}$$

Coordonatele punctului O față de sistemul fix se scriu:

$$\begin{aligned} x_0 &= -O_1E = -O_1O\cos 2\varphi = -R\cos 2\varphi \\ y_0 &= -EO = -O_1O\sin 2\varphi = -R\sin 2\varphi \end{aligned} \tag{h}$$

Proiecțiile vitezei v_0 pe axele mobile se scriu din fig. 10.6 astfel:

$$v_{0x} = v_0\sin\varphi; \qquad v_{0y} = -v_0\cos\varphi \tag{i}$$

Înlocuind acestea în formulele (d) şi (e) se obțin ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei şi Bazei , aceleaşi cu cele obținute prin metoda geometrică .

Vitezele punctelor B şi A sunt:

$$\begin{aligned} v_B &= \omega\cdot IB = v_0\sin\varphi \\ v_A &= \omega\cdot IA = \frac{v_0}{2R}\cdot\sqrt{\ell^2 + (2R)^2 - 4lR\cos\varphi} \end{aligned} \tag{j}$$

10.7. ***Se consideră*** *o bară OA de lungime ℓ se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcție orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe semicercul de rază R (fig. 10.7.a).* ***Se cunosc*** *viteza de deplasare a punctului O , $v_0 = const$. **Se cer:** Ecuația Bazei şi Rostogolitoarei şi vitezele punctelor A şi B ale barei.*

Rezolvare :

a. Metoda geometrică

Din considerații geometrice şi trigonometrice (fig.10.7.a), avem următoarele ecuații parametrice ale Bazei:

$$\begin{cases}\xi_1 = O_1O = \dfrac{R}{\cos\varphi}; \qquad \eta_1 = O_1O\cdot tg\varphi = R\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\end{cases} \tag{a}$$

Eliminând parametrul φ din relațiile (a) se obține ecuația Bazei:

$$\xi_1^4 - R^2\left(\xi_1^2 + \eta_1^2\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Pentru Rostogolitoare (fig.CR2.4.2), obținem :

$$\begin{cases} \xi = OD = \eta_1 \sin\varphi = Rtg^2\varphi \\ \eta = ID = \eta_1 \cos\varphi = Rtg\varphi \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Eliminând parametrul φ din relațiile (a) se obține ecuația Bazei:

$$\eta^2 = R\xi \qquad \text{(d)}$$

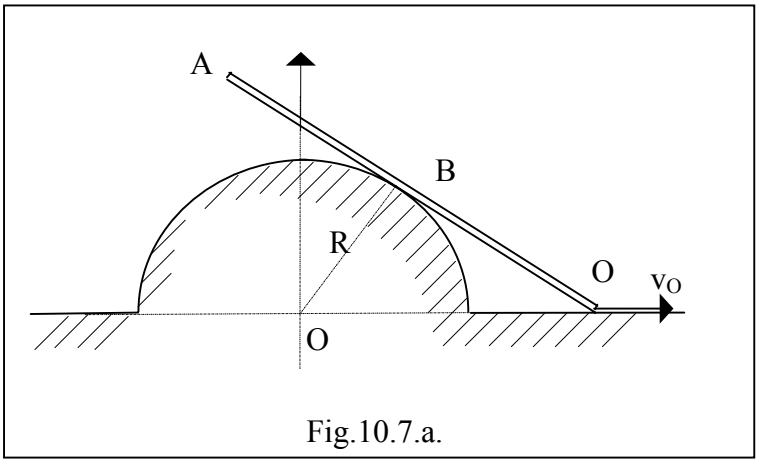


Fig.10.7.a.

b. Metoda grafo-analitică

Acelaşi rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice teoretice ale Rostogolitoarei:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \qquad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \qquad \text{(e)}$$

şi ecuațiile parametrice ale Bazei

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ \eta_1 &= y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

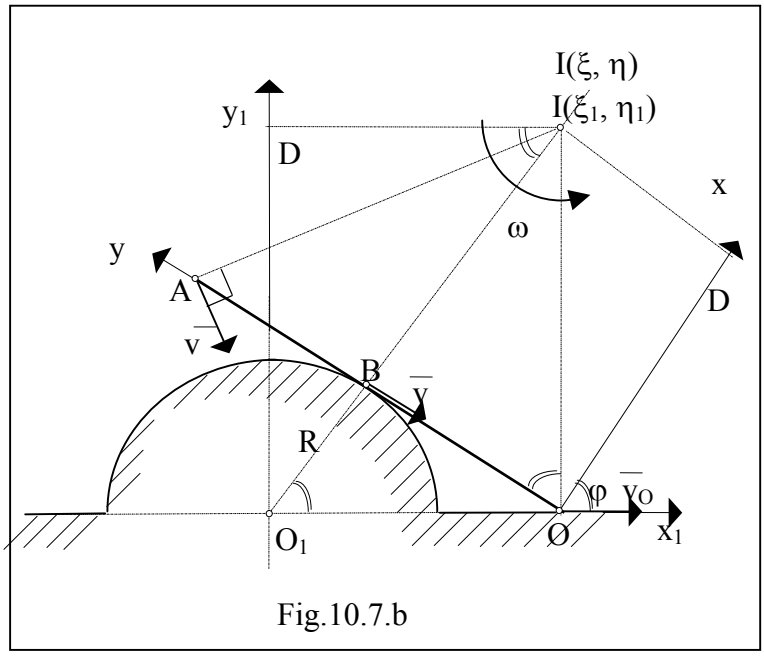


Fig.10.7.b

în care dacă se înlocuiesc valorile pentru:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\varphi \\ v_{0y} = -v_0\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = O_1O = \dfrac{R}{\cos\varphi} \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{(g)}$$

se obține:

$$\omega = \frac{v_0}{IO} = \frac{v_0\cos^2\varphi}{R\sin\varphi}, \qquad \text{(h)}$$

Vitezele pentru cele două puncte se determină astfel:

$$v_B = \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0\cos\varphi$$

$$v_A = \omega \cdot IA = \frac{v_0\cos^2\varphi}{R\sin\varphi}\sqrt{\ell^2 + R^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} - 2lR\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} \qquad \text{(i)}$$

10.8. ***Se consideră*** *o bară OA de lungime ℓ care se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcție orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe o muchie situată la înălțimea h (fig. 10.8.a).* ***Se cunosc*** *viteza de deplasare a punctului O , $v_0 = constant$.* ***Se cer:*** *Baza şi Rostogolitoarea mişcării, precum şi vitezele punctelor A şi B ale barei.*

Rezolvare:

a. Metoda geometrică

Intersecția perpendicularelor duse în O şi B pe $\bar{v}_0$ *si* $\bar{v}_B$ determină C.I.R, punctul de viteză nulă I . Se notează $\varphi = \varphi(t)$ unghiul dintre axele O_1x_1 (fixă) şi *Ox* (mobilă). Din considerații geometrice (fig. 10.8.b) se poate scrie relațiile :

$$\begin{cases} \xi_1 = O_1O = h \cdot tg\varphi \\ \eta_1 - h = \xi_1 \cdot tg\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = h \cdot tg\varphi \\ \eta_1 = \dfrac{h}{cos^2\varphi} = h \cdot \left(1 + tg^2\varphi\right) \end{cases} \qquad (a)$$

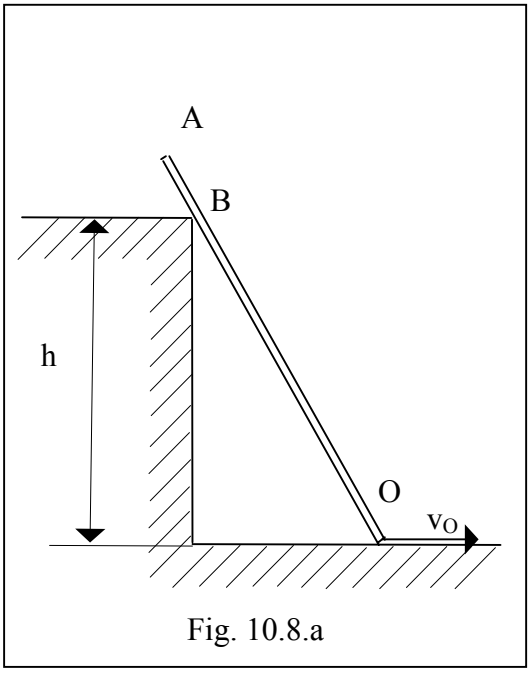


Fig. 10.8.a

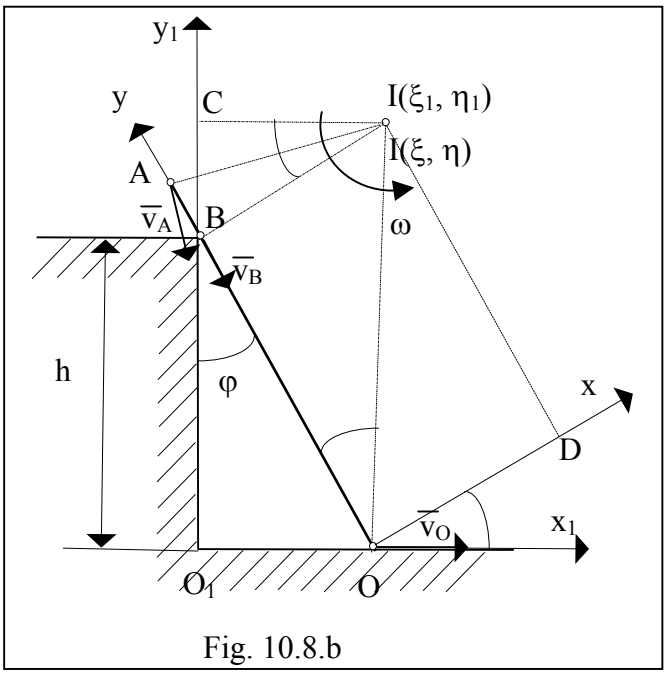


Fig. 10.8.b

Eliminând parametrul φ din relațiile (a) se obține ecuația Bazei :

$$\xi_1^2 - \eta_1 h + h^2 = 0 . \qquad (b)$$

Ecuația (b) se poate obține direct din asemănarea triunghiurilor dreptunghice OO_1B şi BO_1I:

$$\frac{OO_1}{O_1B} = \frac{BC}{CI} \Rightarrow \frac{\xi_1}{h} = \frac{\eta_1 - h}{\xi_1} \qquad (c)$$

Pentru Rostogolitoare avem din fig. 10.8.b :

$$\begin{cases} \eta = ID = \eta_1 cos\varphi = \dfrac{h}{cos\varphi}; \qquad \xi = \eta_1 sin\varphi = \dfrac{h\,sin\varphi}{cos^2\varphi} \end{cases} \qquad (d)$$

Eliminând parametrul φ din relațiile (d) se obține ecuația Rostogolitoarei:

$$\eta^4 - h^2\left(\eta^2 + \xi^2\right) = 0 \qquad \text{(e)}$$

b. Metoda grafo-analitică

Acelaşi rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \qquad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \qquad \text{(f)}$$

şi ale ecuațiile parametrice ale Bazei

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0 + \xi cos\varphi - \eta sin\varphi \\ \eta_1 &= y_0 + \xi sin\varphi + \eta cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(g)}$$

în care:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 cos\varphi \\ v_{0y} = -v_0 sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = O_1O = h \cdot tg\varphi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{h\dot{\varphi}}{cos^2\varphi} = v_0 \quad sau \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{v_0 cos^2\varphi}{h} \qquad \text{(h)}$$

Vitezele punctelor A şi B se obțin astfel:

$$\begin{aligned} &\omega = \frac{v_0}{IO} = \frac{v_0}{\eta_1} = \frac{v_0}{h} cos^2\varphi; \\ &v_B = \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0 sin\varphi \\ &v_A = \omega \cdot IA = \omega\sqrt{OA^2 + IO^2 - 2OA \cdot OI\, cos\varphi} = \omega\sqrt{\ell^2 + \eta_1^2 - 2\ell\eta_1\, cos\varphi} \\ &v_A = \frac{v_0}{h} cos^2\varphi \sqrt{\ell^2 + \frac{h^2}{cos^4\varphi} - 2\ell h \frac{1}{cos\varphi}} \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

10.9. ***Se consideră*** *o bară OA de lungime ℓ se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcția orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe cercul fix de rază R (fig. 10.9.a), iar extremitatea O se deplasează cu viteză constantă $v_0 = const$.* ***Se cer:*** *Ecuația Bazei şi Rostogolitoarei mişcării, vitezele punctelor A şi B ale barei.*

Rezolvare :

a. Metoda geometrică

Din considerații geometrice şi trigonometrice (fig.10.9.b) ($\varphi=90^0-2\alpha$) avem următoarele ecuații parametrice ale Bazei :

$$\begin{cases} \xi_1 = O_1O = R \cdot ctg\alpha \\ \eta_1 = OI = \dfrac{BO}{\cos\varphi} = \dfrac{R \cdot ctg\alpha}{\cos(\pi/2 - 2\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{R\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \eta_1 = \dfrac{R}{2\sin^2\alpha} \end{cases} \quad (a)$$

Eliminând parametrul α se obține ecuația Bazei sub forma implicită:

$$\xi_1^2 - 2R\eta_1 + R^2 = 0 \quad (b)$$

Pentru Rostogolitoare (fig. 10.9.b) obținem în mod analog :

$$\begin{cases} \xi = OD = \eta_1 \sin\varphi = \dfrac{R\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha} \\ \eta = ID = \eta_1 \cos\varphi = \dfrac{R\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \quad (c)$$

Eliminând parametrul α se obține ecuația Rostogolitoarei sub forma implicită:

$$\eta^2 - 2R\xi - R^2 = 0 \quad (d)$$

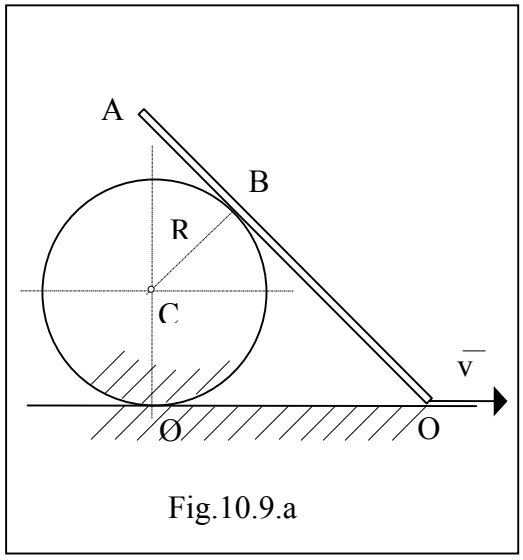


Fig.10.9.a

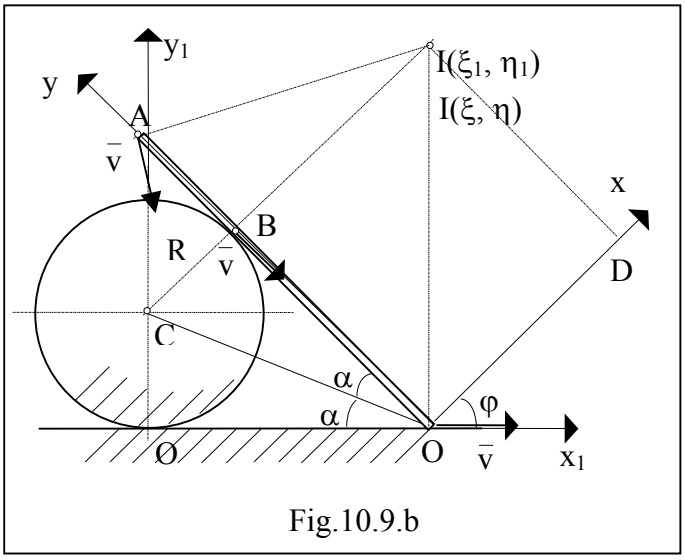


Fig.10.9.b

b. Metoda grafo-analitică

Acelaşi rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\left\{ \xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \qquad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \right. \quad (f)$$

şi ale ecuațiile parametrice ale Bazei:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ \eta_1 = y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{cases} \quad (g)$$

în care:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\varphi = v_0\sin 2\alpha \\ v_{0y} = -v_0\sin\varphi = -v_0\cos 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = O_1O = R \cdot ctg\alpha = R \cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (h)$$

Derivând expresiile (g) se obține:

$$\dot{x}_0 = \frac{R\dot{\varphi}}{2\sin^2\alpha} = v_0 \quad sau \qquad \dot{\varphi} = \omega = \frac{2v_0 \sin^2\alpha}{R} \tag{i}$$

Vitezele punctelor A şi B se obțin astfel:

$$v_B = \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0 \cos 2\alpha$$

$$v_A = \omega \cdot IA = \frac{2v_0 \sin^2\varphi}{R}\sqrt{\ell^2 + \frac{R^2}{4\sin^4\varphi} - 2lR \cdot ctg\alpha} \tag{j}$$

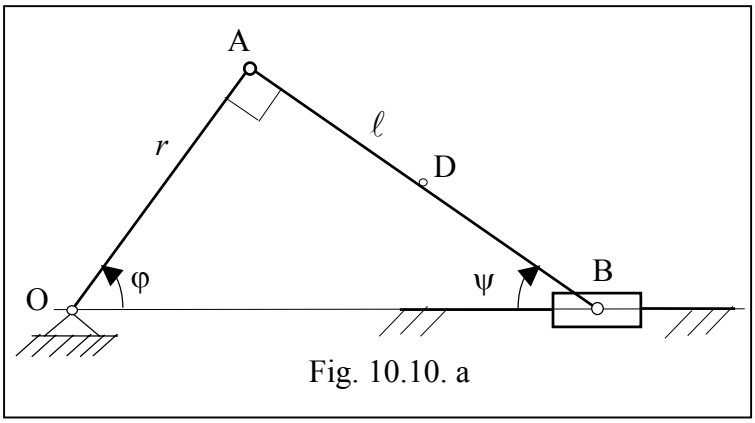


Fig. 10.10. a

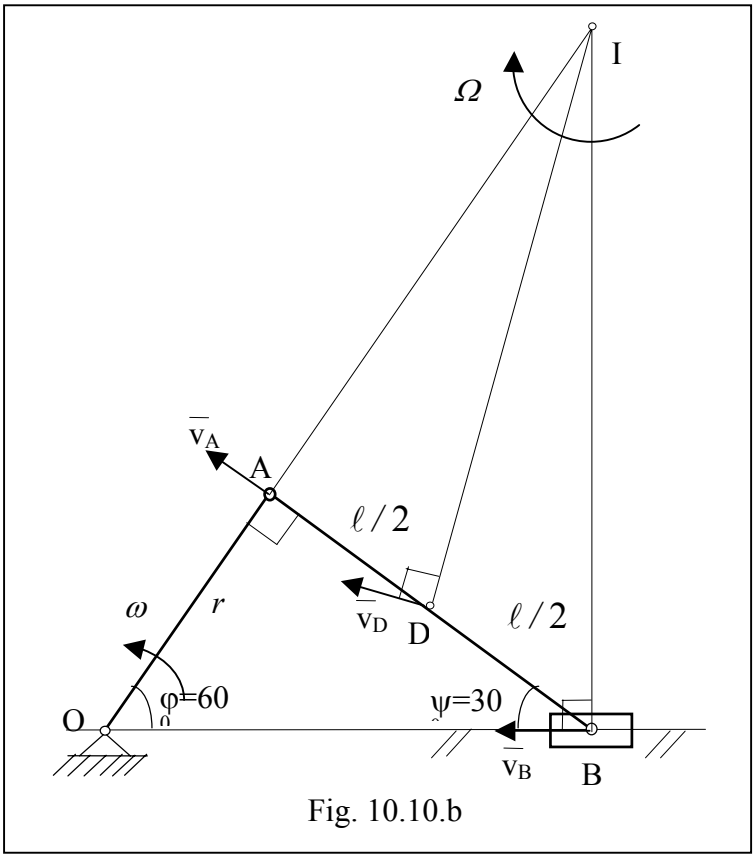


Fig. 10.10.b

10.10. ***Se consideră*** *mecanismul bielă-manivelă din figura 10.10.a, pentru care se cunosc:* $OA = r = 2,\ AB = \ell = 2\sqrt{3}$ *(m) şi legea de mişcare a manivelei OA:* $\varphi(t) = 3t$ *(rad).* ***Se cere*** *viteza culisei B la momentul t_1 pentru care unghiul $OAB = 90^0$, viteza punctului D al bielei aflat la mijlocul disatnței AB, poziția centrului instantaneu de rotație şi viteza unghiulară a bielei la acelaşi moment t_1.*

Rezolvare :

Se notează cu ψ unghiul OBA (fig. 10.10.b).

Viteza unghiulară a manivelei OA este: $\omega = \dot{\varphi} = 3$ *(rad / s)*

Viteza punctului A va fi :

$v_A = OA \cdot \omega = r\omega = 6$ *(m / s)*

Conform datelor problemei se obține:

$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 4$ *(m)*

Deci rezultă pentru poziția dată avem valorile: $\psi = 30^0$, $\varphi = 60^0$.

Cunoscând direcţiile şi sensurile vitezelor punctelor A şi B , intersecţia perpendicularelor duse pe aceste direcţii, este centrul instantaneu de rotaţie

Conform fig. 10.10.b, din triunghiul AIB rezultă:

$AI = AB\ tg\varphi = 6 \quad (m);$

$BI = AB/\cos\varphi = 4\sqrt{3} \quad (m)$

Viteza unghiulară Ω a bielei AB, aflată în mişcare plan paralelă se determină din relaţia: $v_A = AI \cdot \Omega$, de unde rezultă viteza unghiulară cerută:

$$\Omega = \frac{v_A}{AI} = 1 \quad (rad/s)$$

Viteza culisei B a mecanismului se detremină cu ajutorul relaţiei:

$v_B = BI \cdot \Omega = 4\sqrt{3} = 6{,}92 \quad (m/s)$

Viteza punctului D al bielei este perpendiculară pe ID şi se detremină cu ajutorul relaţiei:

$v_D = DI \cdot \Omega = \sqrt{AI^2 + AD^2} \cdot \Omega = \sqrt{39} = 6{,}24 \quad (m/s)$

10.11. ***Se consideră*** *mecanismul bielă-manivelă din figura 10.11.a, care antrenează un disc de rază R, ce se rostogoleşte fără alunecare dealungul unei suprafeţe paralele cu OB; se cunosc:* $OA = r = 10$; $AB = \ell = 50$; $R = 12$ *(cm) şi legea de mişcare a manivelei OA:* $\varphi(t) = \pi t$ *(rad). Pentru două poziţii ale mecanismului corespunzătoare unghiurilor* $\varphi_1 = 0$ *respectiv* $\varphi_2 = 90^0$, ***se cere:***

1. *viteza şi acceleraţia unghiulară a roţii de rază R;*
2. *viteza şi acceleraţia punctelor D şi E ale roţii;*
3. *poziţia centrului instantaneu de rotaţie şi a polului acceleraţiilor roţii .*

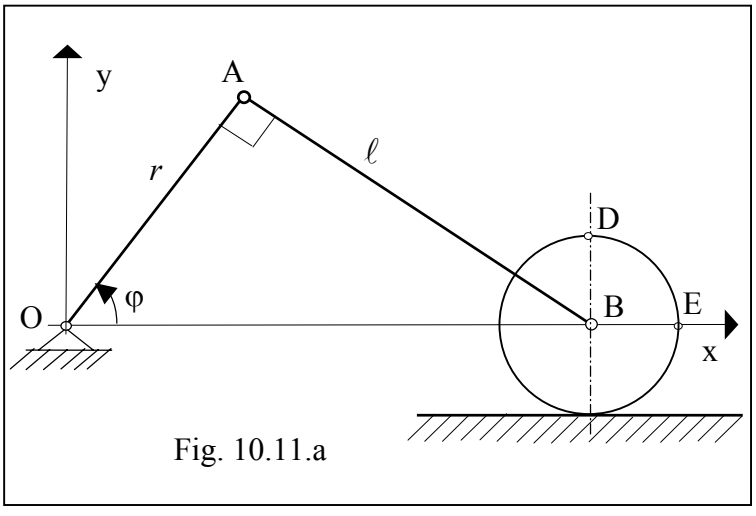


Fig. 10.11.a

Rezolvare :

Cazul $\varphi_1 = 0$. Pentru prima poziţie a mecanismului dat corespunzătoare unghiului φ_1 a se vedea fig. 10.11.b, c, d:

Viteza unghiulară a manivelei OA este:

$\omega_0 = \dot{\varphi} = \pi \quad (rad/s)$ (a)

Viteza punctului A va fi:

$v_A = OA \cdot \omega = 10\pi \quad cm/s$ (b)

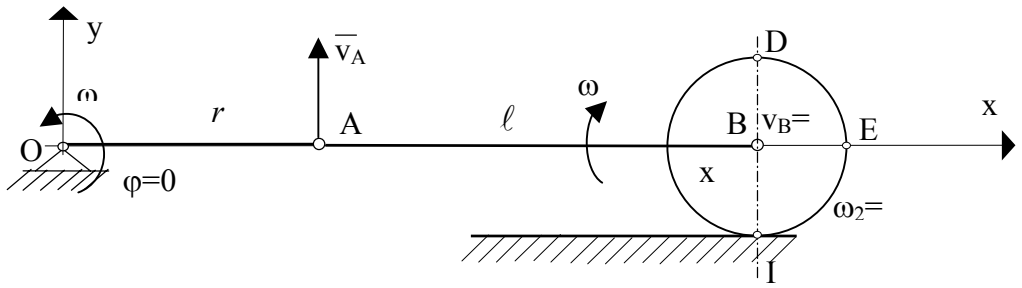


Fig. 10.11.b

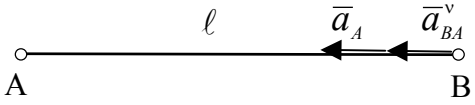


Fig. 10.11.c

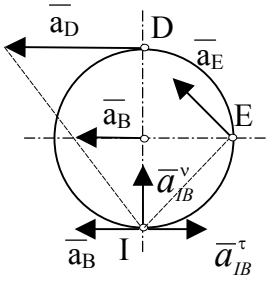


Fig. 10.11.d

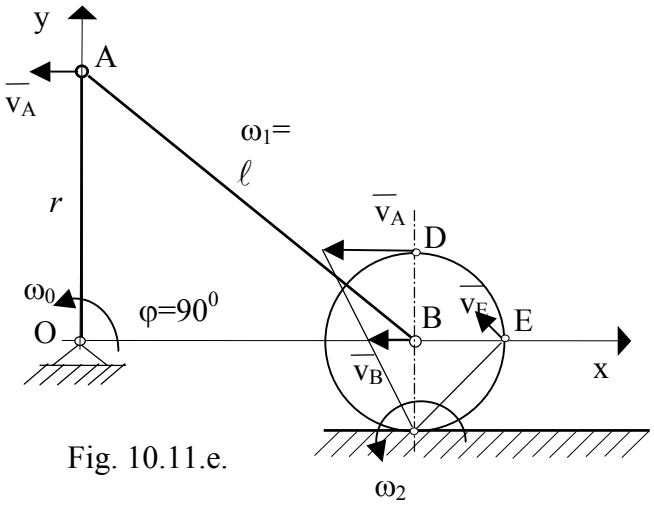


Fig. 10.11.e.

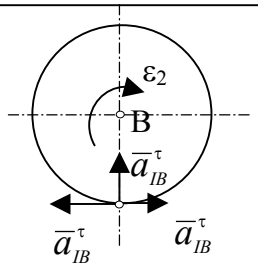


Fig. 10.11.g

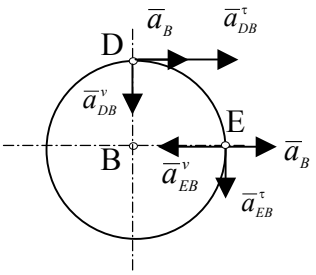


Fig. 10.11.h

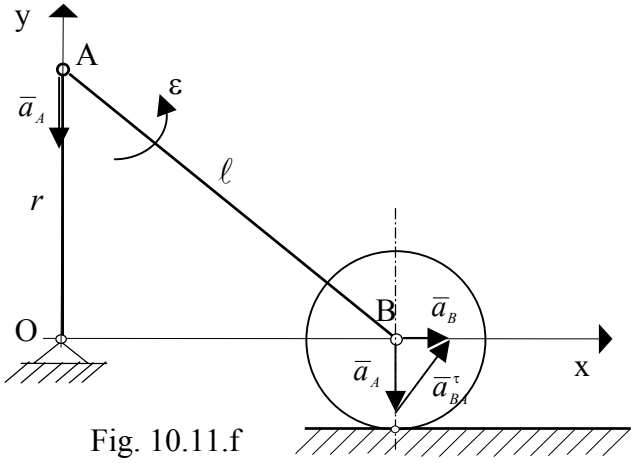


Fig. 10.11.f

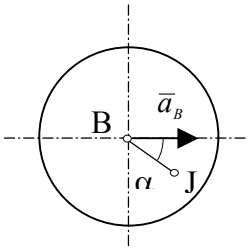


Fig. 10.11.i

Pentru a detremina viteza unghiulară ω_1 a bielei AB se pleacă de la relația evidentă: $v_A = AB \cdot \omega_1$, de unde rezultă:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AB} = \frac{\pi}{5} \quad (rad/s) \qquad \text{(c)}$$

Accelerația punctului A este:

$$a_A = a_a^{\nu} = OA \cdot \omega^2 = 10\pi^2 \ \ cm/s^2 \qquad \text{(d)}$$

Între accelerațiile punctelor A şi B există relația vectorială (vezi fig. 10.11.c):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\nu} + \overline{a}_{BA}^{\tau} \qquad \text{(e)}$$

unde: $\left|\overline{a}_{BA}^{\nu}\right| = BA \cdot \omega_1^2 = 2\pi^2 \ \ cm/s^2$ (f)

$\overline{a}_{BA}^{\tau}$ este cunoscută doar ca direcție ($\perp \overline{BA}$), fiind necunoscută ca mărime

Dacă se proiectează relația (e) pe axa Oy rezultă a_{BA}^{τ}=0, prin urmare $\varepsilon_1=0$

Proiectând relația (e) pe axa Ox rezultă:

$$a_B = -a_A - a_{BA}^{\nu} = -12\pi^2 \ \ cm/s^2 \qquad \text{(g)}$$

Accelerația punctului I aparținând roții se poate exprima prin relația vectorială (vezi fig. 10.11.c): $\overline{a}_I = \overline{a}_B + \overline{a}_{IB}^{\nu} + \overline{a}_{IB}^{\tau}$ (h)

Proiectând relația (h) pe axa Ox rezultă:

$$0 = a_B - a_{IB}^{\tau} \qquad \Rightarrow 12\pi^2 = \varepsilon_2 \cdot BI \qquad \Rightarrow \varepsilon_2 = \pi^2 \ \ rad/s^2 \qquad \text{(i)}$$

Dacă se proiectează relația (h) pe axa Oy rezultă:

$$a_I = a_{IB}^{\nu} = BI \cdot \omega_2^2 = 0 \qquad \text{(j)}$$

Rezultă că centrul instantaneu de rotație şi polul accelerațiilor se află în punctul I.

Accelerațiile punctelor D şi E aparținând roții se determină cu ajutorul relațiilor vectoriale (vezi fig. 10.11.d):

$\overline{a}_D = \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{ID}$, respectiv: $\overline{a}_E = \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{IE}$.

Mărimile acestor accelerații sunt:

$$\left|\overline{a}_D\right| = \varepsilon_2 \cdot R\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\pi^2 \ \ cm/s^2; \ \left|\overline{a}_E\right| = \varepsilon_2 \cdot 2R = 24\pi^2 \ \ cm/s^2 \qquad \text{(k)}$$

Distribuția accelerațiilor este reprezentată în fig. 10.11.d

2. Pentru cazul $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, a se vedea fig. 10.11.e ... i.

Viteza punctului A va fi: $v_A = OA \cdot \omega = 10\pi \ \ cm/s$

Vitezele punctelor A şi B sunt paralele, deci $\overline{v}_A = \overline{v}_B$, prin urmare viteza unghiulară a bielei va fi $\omega_1=0$.

Centrul instantaneu de rotație fiind în punctul I, putem scrie: $v_B = IB \cdot \omega_2$ de unde rezultă viteza unghiulară a roții: $\omega_2 = \dfrac{v_B}{IB} = \dfrac{5\pi}{6} \ \ (rad/s)$. (l)

Vitezele punctelor D şi E aparţinând roţii se determină cu ajutorul relaţiilor vectoriale: $\overline{v}_D = \overline{\omega}_2 \times \overline{ID}$, respectiv: $\overline{v}_E = \overline{\omega}_2 \times \overline{IE}$.

Mărimile acestor viteze sunt:

$$\left|\overline{v}_D\right| = \omega_2 \cdot 2R = 20\pi \quad cm/s; \quad \left|\overline{v}_E\right| = \omega_2 \cdot \sqrt{2}R = 10\sqrt{2}\pi \quad cm/s \tag{m}$$

Acceleraţia punctului A este orientată de la A spre O (vezi fig. 10.11.f):

$$a_A = a_a^{\nu} = OA \cdot \omega^2 = 10\pi^2 \quad cm/s^2 \tag{n}$$

Acceleraţia punctului B se determină cu ajutorul relaţiei vectorială (vezi fig. 10.11.c):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\nu} + \overline{a}_{BA}^{\tau} \tag{o}$$

unde deoarece ω_1=0, rezultă: $\left|\overline{a}_{BA}^{\nu}\right| = BA \cdot \omega_1^2 = 0$

Notând cu γ unghiul dintre $\overline{a}_A \;\; si \;\; \overline{a}_{BA}^{\nu}$, este valabilă relaţia:

$$tg\gamma = \frac{OA}{OB} = 0{,}204 \tag{p}$$

Dacă se proiectează relaţia (o) pe axele Ox şi Oy rezultă:

$$\begin{cases} a_B = a_{BA}^{\tau} \sin\gamma \\ 0 = a_{BA}^{\tau} \cos\gamma - a_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = a_A tg\gamma = 2{,}04\pi^2 \quad cm/s^2 \\ a_{BA}^{\tau} = \sqrt{a_A^2 + a_B^2} = 10{,}2\pi^2 \quad cm/s^2 \end{cases} \tag{q}$$

Acceleraţia unghiulară a bielei AB se detremină cu ajutorul relaţiei:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = 0{,}204\pi^2 \quad (rad/s^2) \tag{r}$$

Distribuţia acceleraţiilor este reprezentată în fig. 10.11.g

$$\overline{a}_I = \overline{a}_B + \overline{a}_{IB}^{\nu} + \overline{a}_{IB}^{\tau} \tag{s}$$

Dacă se proiectează relaţia (s) pe axele Ox şi Oy rezultă:

$$\begin{aligned} &\left|\overline{a}_B\right| = \left|\overline{a}_{IB}^{\tau}\right| = 2{,}04\,\pi^2 \quad cm/s^2 \\ &\left|\overline{a}_I\right| = \left|\overline{a}_{IB}^{\nu}\right| = R\omega_2^2 = 8{,}33\,\pi^2 \quad cm/s^2 \end{aligned} \tag{t}$$

Acceleraţia unghiulară a roţii se detremină cu ajutorul relaţiei:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{IB}^{\tau}}{IB} = 0{,}17\,\pi^2 \quad (rad/s^2) \tag{u}$$

Distribuţia acceleraţiilor punctelor D şi E aparţinând roţii se determină cu ajutorul relaţiilor vectoriale (vezi fig. 10.11.h):

$$\begin{aligned} &\overline{a}_D = \overline{a}_B + \overline{a}_{DB}^{\nu} + \overline{a}_{DB}^{\tau} \\ &\overline{a}_E = \overline{a}_B + \overline{a}_{EB}^{\nu} + \overline{a}_{EB}^{\tau} \end{aligned} \tag{v}$$

Având în vedere orientările acestor accelerații mărimile acceleraţiilor punctelor D şi E sunt:

$$\begin{aligned} &\left|\overline{a}_D\right| = \sqrt{\left(a_B + a_{DB}^{\tau}\right)^2 + \left(a_{DB}^{\nu}\right)^2} = 9{,}25\pi^2 \quad cm/s^2; \\ &\left|\overline{a}_E\right| = \sqrt{\left(-a_B + a_{EB}^{\nu}\right)^2 + \left(a_{EB}^{\tau}\right)^2} = 6{,}6\pi^2 \quad cm/s^2 \end{aligned} \tag{w}$$

Unghiurile α_1 şi α_1 pe care le fac aceste accelerații cu direcția verticală se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} &tg\alpha_1 = \frac{a_B + a_{DB}^{\tau}}{a_{DB}^{\nu}} = 0{,}49 \Rightarrow \alpha_1 = 26{,}105^0 \\ &tg\alpha_2 = \frac{a_{EB}^{\tau}}{a_{EB}^{\nu} - a_B} = 0{,}325 \Rightarrow \alpha_2 = 18{,}004^0 \end{aligned} \tag{x}$$

Distanța BJ dintre punctul B şi polul acceleraţiilor (vezi fig. 10.11.i) este dată de :

$$BJ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega^4}} = 2{,}86 \ cm \tag{y}$$

iar unghiul α dintre BJ şi $\overline{a}_B$ este $tg\alpha = \dfrac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = 0{,}2444 \Rightarrow \alpha = 13{,}734^0$ (z)

10.12. ***Se consideră*** *mecanismul bielă-manivelă din figura 10.12.a, care antrenază un disc de rază R ce se rostogoleşte fără alunecare pe crecul de rază r dealungul unei suprafeţe paralele cu OB; se cunosc: legea de mişcare a manivelei OA:* $\varphi(t) = 2t$ *(rad),* $OA = 40$*;* $AB = 80$*;* $BC = 25$*;* $r = 15$ *(cm).*

Se cer *vitezele punctelor A, B, C ale roţii precum şi vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului pentru poziţia particulară dată de* $\varphi = 30^0$.

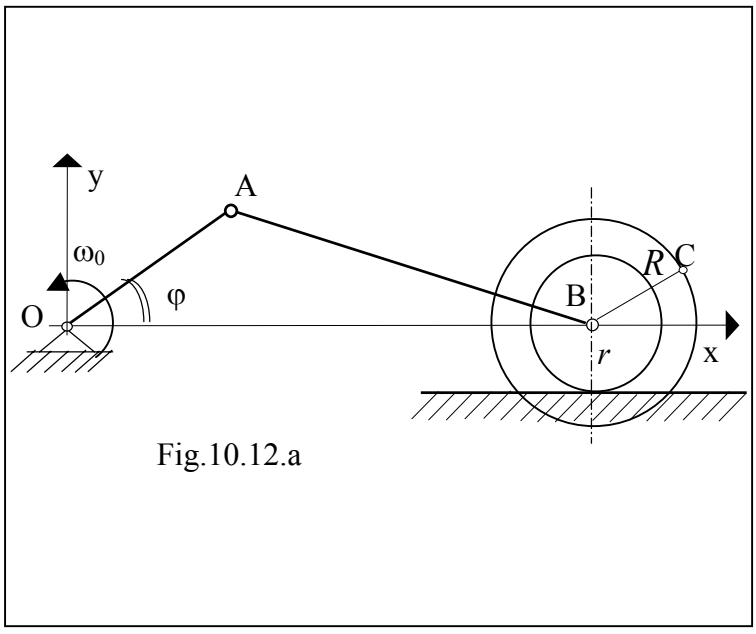


Fig.10.12.a

Rezolvare :

Se observă că (fig. 10.12.a) elementele mecanismului au următoarele mişcări: rotație-manivela OA, plan-paralelă-biela AB şi roata de rază R. Centrele instantanee de rotație ale bielei şi roții se determină ridicând perpendiculare pe suporturile vitezelor v_A respectiv v_B (fig. 10.12.b).

Viteza unghiulară a bielei AB este:

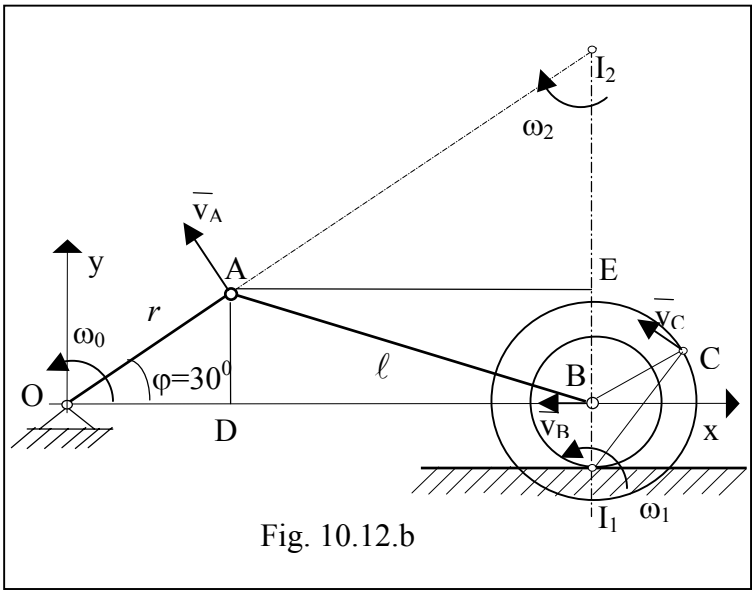


Fig. 10.12.b

$$\omega_2 = \frac{v_A}{I_2 A} \qquad \text{(a)}$$

unde I_2A se determină din triunghiul AEI_2:

$$I_2A = \frac{AE}{cos\varphi} = \frac{\sqrt{AB^2 - (OAsin\varphi)^2}}{cos\varphi}$$

$$I_2A = 89{,}6\ cm \qquad \text{(b)}$$

Rezultă:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{I_2 A} = 0{,}839\ rad/s \qquad \text{(c)}$$

Viteza punctului B se determină astfel:

$v_B = \omega_2 \cdot I_2 B$, unde $I_2B = (OA + I_2A)\sin 30^0 = 64{,}8\ cm$

Rezultă $v_B = \omega_2 \cdot I_2 B = 57{,}9\ cm/s$

Centrul instantaneu de rotație al roții se află în I_1, iar viteza unghiulară se calculează în raport cu acesta cu ajutorul relației: $\omega_1 = \frac{v_B}{I_1 B} = 3{,}86\ rad/s$

Viteza punctului C se determină astfel: $v_C = \omega_1 \cdot I_1 C$

unde: $I_1C = \sqrt{I_1B^2 + BC^2 - 2 \cdot I_1B \cdot BC\cos 120^0} = 35\ cm$

Rezultă $v_C = \omega_1 \cdot I_1 C = 135\ cm/s$

10.13. ***Se consideră*** *un sistem de trei corpuri (1), (2) şi (3) legate între ele prin fire flexibile şi inextensibile, executând respectiv mişcări de tranlație, rotație şi plan-paralelă (fig.10.13.a). Se cunosc razele discurilor $R_2=2a$, $r_2=a$, $R_3=2a$, iar discul 3 se rostogoleşte fără să alunece .* ***Se cere*** *să se exprime vitezele corpurilor 2 şi 3 în funcție de viteza corpului 1(sau analiza cinematică a sistemului de corpuri).*

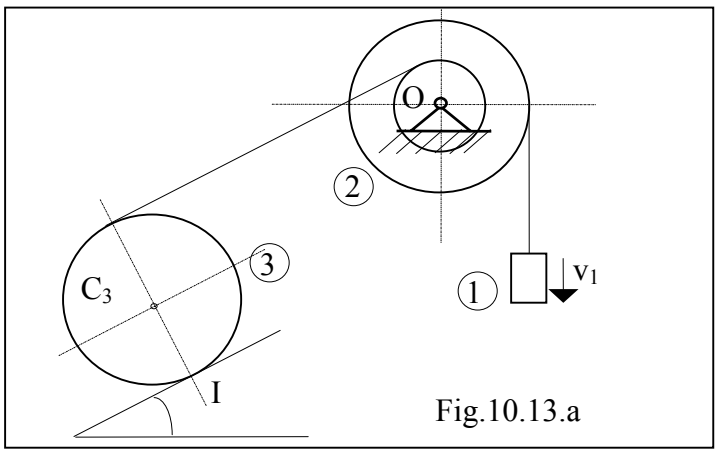


Fig.10.13.a

Rezolvare:

Distribuțiile de viteze sunt conform fig.10.13.b şi se pot scrie relațiile:

Pentru corpul 1 :

Viteza este: v_1

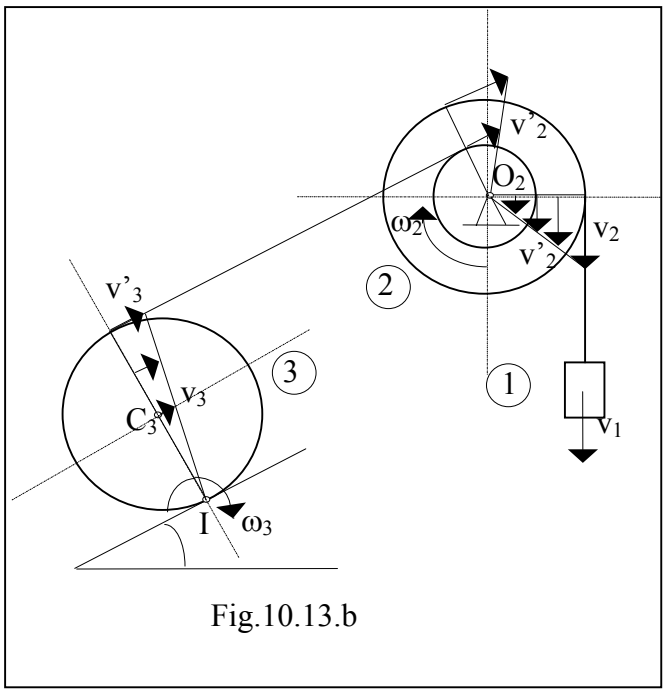


Fig.10.13.b

Pentru corpul 2 :

$$\left.\begin{aligned}&\omega_2=\frac{v_2}{R_2}=\frac{v_2'}{r_2}\\&v_2=v_1\\&r_2=a\\&R_2=2a\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\omega_2=\dfrac{v_1}{2a}\\ v_2'=\dfrac{v_1}{2}\end{cases}\qquad(a)$$

Pentru corpul 3 :

$$\left.\begin{aligned}&\omega_3=\frac{v_3'}{2R_3}=\frac{v_3}{R_3}\\&v_3'=v_2'=\frac{v_1}{2}\\&R_3=2a\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\omega_3=\dfrac{v_1}{8a}\\ v_3=\dfrac{v_1}{4}\end{cases}\qquad(b)$$

10.14. ***Se consideră*** *un sistem de trei corpuri (1), (2) şi (3) legate între ele prin fire flexibile şi inextensibile, executând respectiv mişcări de tranlaţie, rotaţie şi plan-paralelă (fig.10.14.a). Se cunosc razele discurilor $R_2=2a$, $r_2=a$, $r_3=a$, $R_3=2a$, iar discul 3 se rostogoleşte fără să alunece .*

Se cere *să se exprime vitezele corpurilor 2 şi 3 în funcţie de viteza corpului 1(sau analiza cinematică a sistemului de corpuri).*

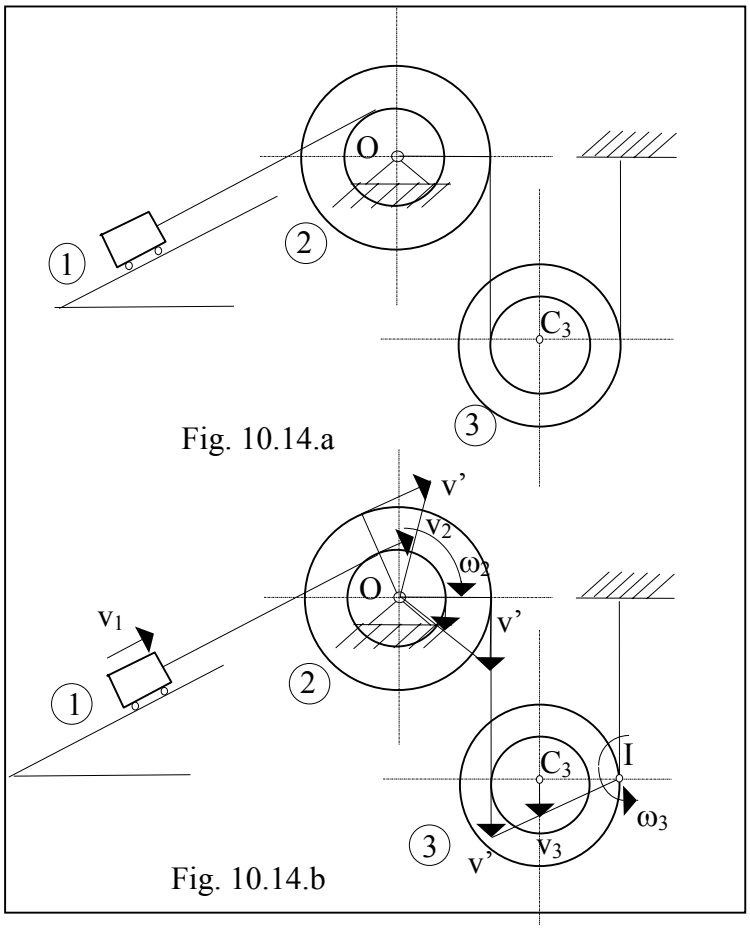


Fig. 10.14.a

Fig. 10.14.b

Rezolvare:

Distribuţiile de viteze sunt conform fig.CR2.4.10.b şi se pot scrie relaţiile:

Pentru corpul 1 :

Viteza este: v_1

Pentru corpul 2 :

$$\left.\begin{aligned}&\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{v_2'}{R_2}\\&v_2=v_1\\&r_2=a,R_2=2a\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_2=\dfrac{v_1}{a}\\ v_2'=2v_1\end{cases}$$

Pentru corpul 3:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_3=\frac{v_3'}{R_3+r_3}=\frac{v_3}{R_3}\\&v_3'=v_2'=2v_1\\&r_3=a,R_3=2a\end{aligned}\right\}\Rightarrow\omega_3=\frac{2v_1}{3a}=\frac{v_3}{2a}\Rightarrow\begin{cases}\omega_3=\dfrac{2v_1}{3a}\\v_3=\dfrac{4v_1}{3}\end{cases}\qquad\text{(b)}$$

10.15. ***Se consideră*** *mecanismul din figura 10.15 având elementele geometrice şi mecanice următoare:* $OA=2L, AB=4L, AC=L,(cm),\omega_{OA}=2\omega_0,s^{-1},\varepsilon_{OA}=\omega_0^2,s^{-2}$

Se cer*: vitezele şi acceleraţiile următoare:* $v_A,a_A,v_B,a_B,\omega_{AB},v_C,a_C,\varepsilon_{AB}$*. pentru poziţia mecanismului din fig. 10.15*

Rezolvare:

Cele două bare ale mecanismului sunt: OA aflată în mişcare de rotaţie şi AB în mişcare plan-paralelă . Centrul instantaneu de rotaţie al acesteia din urmă este I.

a) calculul vitezelor punctelor A, B, C : (a)

$$v_A=\omega_{OA}\cdot OA=4L\omega_0\quad cm/s$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{IA}=\frac{v_A}{2AB}=4\omega_0\ rad/s$$

$$v_B=\omega_{AB}\cdot IB=\omega_{AB}\sqrt{IA^2-AB^2}=2\sqrt{3}L\omega_0\ cm/s$$

$$v_C=\omega_{AB}\cdot IC=\omega_{AB}\sqrt{IB^2+CB^2}=\frac{\sqrt{57}}{2}L\omega_0\ cm/s$$

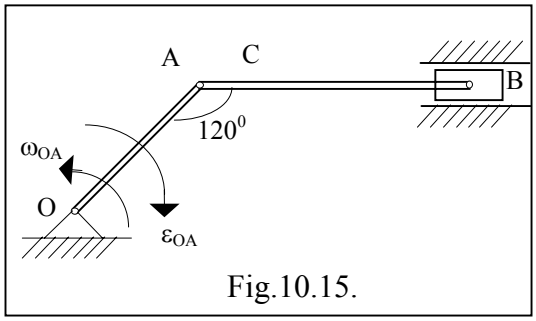


Fig.10.15.

b) calculul acceleraţiilor punctelor A, B, C:

$$\overline{a}_A=\overline{a}_A^{\tau}+\overline{a}_A^{\upsilon}\ unde\begin{cases}a_A^{\tau}=\varepsilon_{OA}\cdot OA=2L\omega_0^2\\a_A^{\upsilon}=\omega_{OA}^2\cdot OA=8L\omega_0^2\end{cases}\qquad\text{(b)}$$

$$\Rightarrow a_A=\sqrt{\left(a_A^{\tau}\right)^2+\left(a_A^{\upsilon}\right)^2}=2\sqrt{17}L\omega_0^2\quad cm/s^2$$

$$tg\beta=\frac{a_A^{\tau}}{a_A^{\upsilon}}=\frac{1}{4}$$

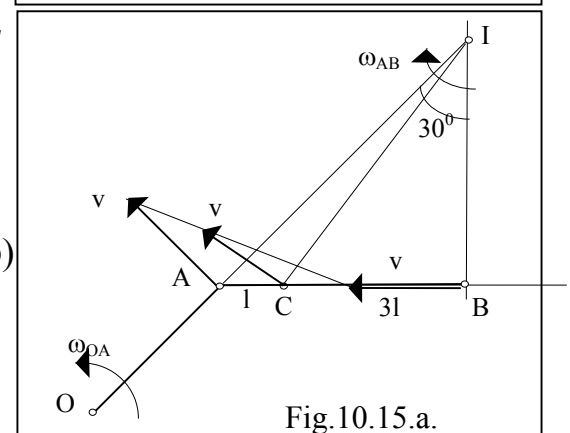


Fig.10.15.a.

$$\overline{a}_B=\overline{a}_A+\overline{a}_{AB}^{\tau}+\overline{a}_{AB}^{\upsilon}$$

$$unde\begin{cases}a_{AB}^{\tau}=\varepsilon_{AB}\cdot AB\\a_{AB}^{\upsilon}=\omega_{AB}^2\cdot AB\end{cases}\Rightarrow\varepsilon_{AB}=\frac{a_{AB}^{\tau}}{AB}(2)\Rightarrow a_{AB}^{\upsilon}=L\omega_0^2$$

$$\overline{a}_{AB}^{\tau}\perp\overline{AB},\quad\overline{a}_{AB}^{\upsilon}\parallel\overline{AB}\quad(dela\ Aspre\ B)$$

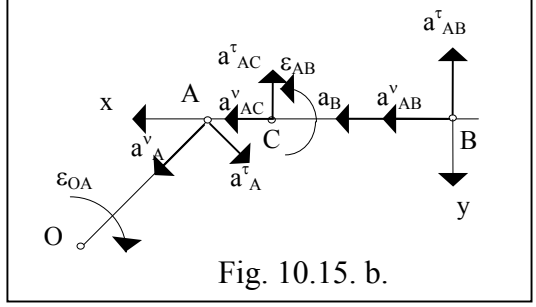


Fig. 10.15. b.

Relația (a) se mai scrie: $\overline{a}_B = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{\upsilon} + \overline{a}_{AB}^{\tau} + \overline{a}_{AB}^{\upsilon}$

care proiectată pe axele x şi y conduce la:

$$\begin{cases} a_B = -a_A^{\tau} cos30^0 + a_A^{\upsilon} sin30^0 + a_{AB}^{\upsilon} \\ 0 = a_A^{\tau} sin30^0 + a_A^{\upsilon} cos30^0 - a_{AB}^{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = \left(5-\sqrt{3}\right)L\omega_0^2 \\ a_{AB}^{\tau} = \left(1+4\sqrt{3}\right)L\omega_0^2 \end{cases}$$

Întrucât a_{AB}^{τ} în (b) se obține : $\varepsilon_{AB} = \dfrac{1+4\sqrt{3}}{4}\omega_0^2$

Accelerația punctului C este:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{\upsilon} + \overline{a}_{AC}^{\tau} + \overline{a}_{AC}^{\upsilon} \quad unde \quad \begin{cases} a_C = \varepsilon_{AC} \cdot AC = \dfrac{1+4\sqrt{3}}{4} L\omega_0^2 \\ a_C = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \dfrac{1}{4} L\omega_0^2 \end{cases} \qquad (c)$$

Proiectând relația (c) pe axele x şi y avem :

$$a_{Cx} = -a\,cos30^0 + a_A^{\upsilon} sin30^0 + a_{AC}^{\upsilon} = \frac{17-4\sqrt{3}}{4} L\omega_0^2$$

$$a_{Cy} = a_A^{\tau} sin30^0 + a_A^{\upsilon} cos30^0 - a_{AC}^{\tau} = \frac{3}{4}\left(1+4\sqrt{3}\right)L\omega_0^2$$

de unde se găseşte prin înlocuire, accelerația punctului C:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} \qquad (d)$$

10.16. ***Se consideră*** *mecanismul din figura 10.16 având elementele geometrice şi mecanice următoare:* $OA = 2L,\ AB = 6L,\ AC = 3L(cm);\ \omega_{OA} = 2\omega_0 s^{-1}, \varepsilon_{OA} = \omega_0^2 s^{-2}$

Se cer*: vitezele şi acceleraţiile următoare:* $v_A, a_A, v_B, a_B, \omega_{AB}, v_C, a_C, \varepsilon_{AB}$, *pentru poziția mecanismului din fig. 10.16.*

Rezolvare :

a) Pentru determinarea vitezelor se ține seama de faptul că bara OA este în mişcare de rotație , iar bara AB în mişcare plan-paralelă. Se determină centrul instantaneu de rotație şi avem:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4L\omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{\sqrt{AB^2 + IB^2}} = \frac{4L\omega_0}{6L\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0 rad/s$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot IB = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0 \cdot 6L = 2\sqrt{2}L\omega_0 cm/s$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot IC = \omega_{AB}\sqrt{BC^2 + IB^2} = \sqrt{10}L\omega_0$$

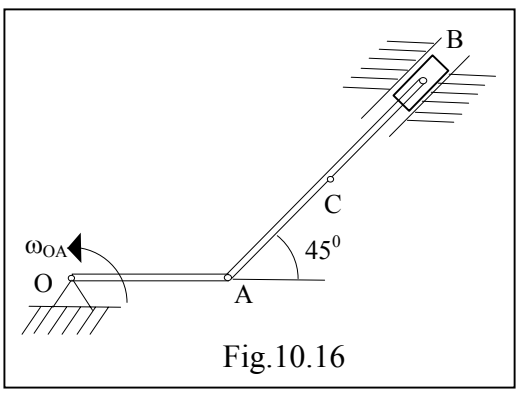


Fig.10.16

Accelerațiile punctelor A, B, C:

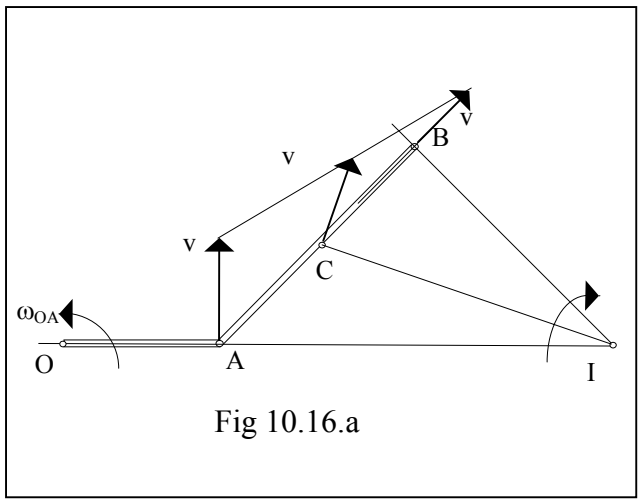


Fig 10.16.a

- accelerația punctului A :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{\upsilon}$$

$$\begin{cases} a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2L\omega_0^2 \\ a_A^{\upsilon} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 8L\omega_0^2 \end{cases}$$

sau

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{\tau}\right)^2 + \left(a_A^{\upsilon}\right)^2} = 2\sqrt{17}L\omega_0^2 ,$$

$$tg\beta = \frac{a_A^{\tau}}{a_A^{\upsilon}} = \frac{1}{4}$$

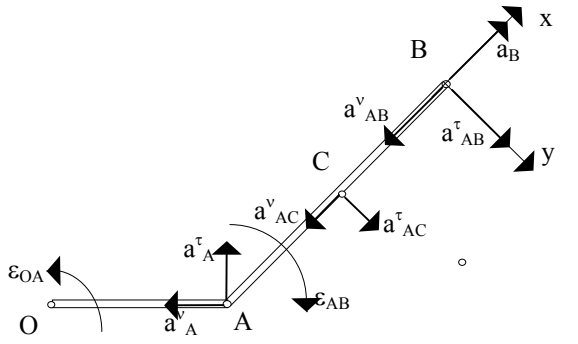


Fig. 10.16.b

- Accelerația punctului B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^{\tau} + \bar{a}_{AB}^{\upsilon}$$

unde $\bar{a}_{AB}^{\tau} \perp \overline{AB}$, $\bar{a}_{AB}^{\upsilon} \| AB$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{\upsilon} + \bar{a}_{AB}^{\tau} + \bar{a}_{AB}^{\upsilon} \qquad (a)$$

unde:

$$\begin{cases} a_{AB}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{AB}^{\tau}}{AB} \\ a_{AB}^{\upsilon} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \dfrac{4}{3}L\omega_0^2 \end{cases} \qquad (b)$$

Proiectând relația (a) pe axele x şi y avem respectiv :

$$\begin{aligned} a_B &= a_A^{\tau} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_A^{\upsilon} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_{AB}^{\upsilon} = -\left(9\sqrt{2}+4\right)\frac{L\omega_0^2}{3} \\ 0 &= a_A^{\tau} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a_A^{\upsilon} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_{AB}^{\tau} = 5\sqrt{2}L\omega_0^2 - a_{AB}^{\tau} \end{aligned} \qquad (c)$$

Se obține :

$$\begin{cases} a_B = -\dfrac{L\omega_0^2}{3}\left(9\sqrt{2}+4\right), cm/s^2 \\ a_{AB}^{\tau} = 5\sqrt{2}L\omega_0^2, cm/s^2 \end{cases} \qquad (d)$$

Înlocuind a_{AB}^{τ} în relația (b) se obține : $\varepsilon_{AB} = \dfrac{5\sqrt{2}}{6}\omega_0^2 rad/s^2$

- Accelerația punctului C este :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{\upsilon} + \bar{a}_{AC}^{\tau} + \bar{a}_{AC}^{\upsilon}; \quad \begin{cases} a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}L\omega_0^2, cm/s^2 \\ a_C = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \dfrac{2}{3}L\omega_0^2 cm/s^2 \end{cases} \qquad (e)$$

Proiectând relația (e) pe x şi y se obține respectiv relațiile :

$$\begin{cases} a_{Cx} = a_A^{\tau} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - a_A^{\upsilon} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - a_{AC}^{\upsilon} \\ a_{Cy} = a_A^{\tau} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + a_A^{\upsilon} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - a_{AC}^{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{Cx} = -\dfrac{3\sqrt{2}+2}{3} L\omega_0^2 \\ a_{Cy} = 5\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) L\omega_0^2 \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Accelerația punctului C se calculează cu formula : $a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$

10.17. ***Se consideră*** *mecanismul manivelă-balansier-piston din fig. 10.17, într-o poziţie particulară($\varphi = 60^0$) în raport cu sistemul de referinţă Oxy. Lungimile elementelor (în mm) sunt: A_0A=R=30, AC=L=130, CD=r=25, A_0B=d=80, A_0D'=D=130. Manivela OA se roteşte cu viteza unghiulară constantă:* $\omega_{10} = \omega_0 = 1 rad/s$*, având sensul indicat în figură.* ***Se cere*** *să se determine:*

$v_{B23}, v_{D50}, a_{B23}, a_{D50}, \omega_{20}, \omega_{40}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{40}$.

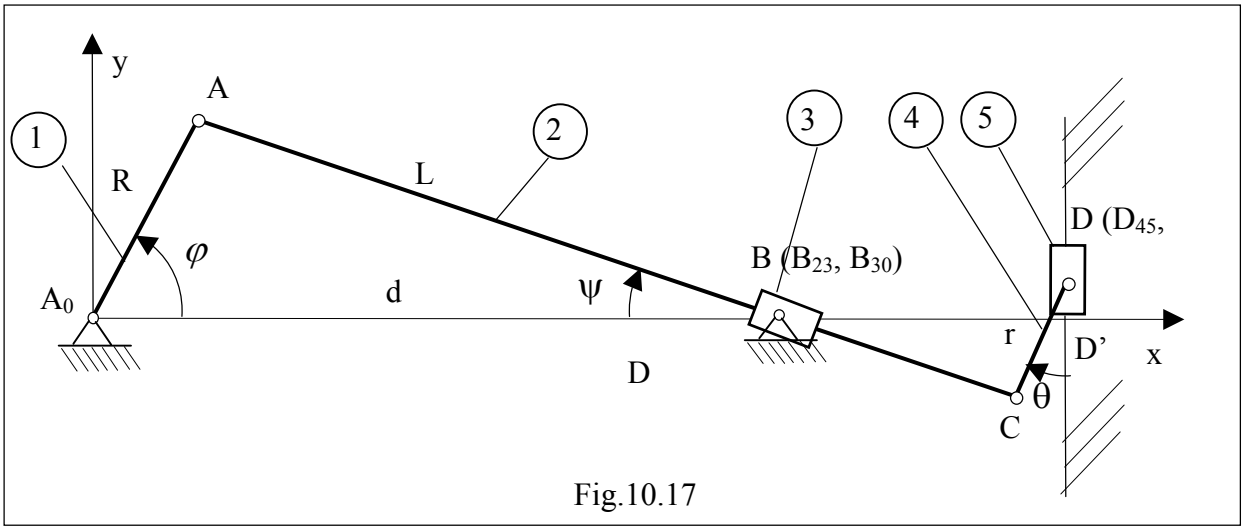


Fig.10.17

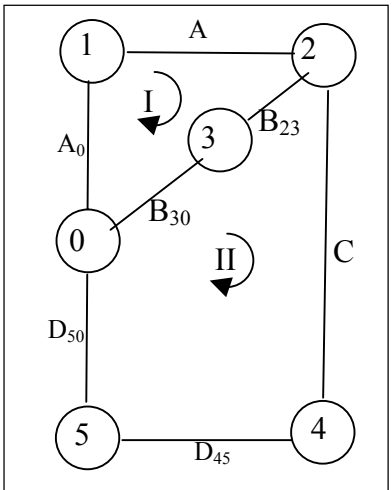


Fig. 10.17.a

Rezolvare:

Graful asociat acestui lanț cinematic *biciclu* este dat în fig. 10.17.a (cu cercuri s-au figurat elementele şi cu linii cuplele cinematice). În punctele B şi D se suprapun câte două cuple cinematice notate pe graful asociat cu: B (B_{23}, B_{30}) respectiv D (D_{45}, D_{50})

1. Analiza poziţională a mecanismului

Pentru *analiza poziţională* a elementelor şi cuplelor acestui lanț cinematic (LC), se determină mai întâi unghiurile ψ *si* θ în funcție de elementele cunoscute : *R, L, r, d, D* şi φ.

Astfel dacă de scrie teorema sinusurilor în triunghiul A_0AB se obține unghiul ψ:

$$\frac{R}{sin\psi}=\frac{d}{sin(180-\varphi-\psi)},\ \text{rezultă:}\quad tg\psi=\frac{R\cdot sin\varphi}{d-R\cdot cos\varphi} \qquad (a)$$

dacă de scriu proiecțiile laturilor A_0A, AC şi AD pe axa *Ox* se obține unghiul θ:

$$R\cos\varphi+L\cos\psi+r\sin\theta=D,\ \text{rezultă:}$$

$$sin\theta=\frac{D-L\cos\psi-R\cos\varphi}{r} \qquad (b)$$

În tabelul de mai jos sunt date coordonatele x şi y ale cuplelor cinematice:

Cupla cinematică	**A_0**	**A**	**B**	**C**	**D**
x	*0*	$R\cos\varphi$	*d*	$R\cos\varphi+L\cos\psi$	*D*
y	*0*	$R\sin\varphi$	*0*	$R\sin\varphi-L\sin\psi$	$R\sin\varphi-L\sin\psi+r\cos\theta$

2. Analiza cinematică a vitezelor

Ecuațiile de condiție pentru viteze sub forma generală se scriu:

$$\sum_{i=1}^{n}v_{Ai,i-1}^{x}-\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,0}(y_B-y_A)=0\ ;\qquad \sum_{i=1}^{n}v_{Ai,i-1}^{y}+\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,0}(x_B-x_A)=0 \qquad (c)$$

Pentru *primul ciclu*: $0 - A_0 - 1 - A - 2 - B_{23} - 3 - B_{30} - 0$ ele se scriu astfel:

$$\begin{aligned}&v_{B32}^{x}-\omega_{10}(y_A-y_{A_0})-\omega_{20}(y_B-y_A)=0;\\&v_{B32}^{y}+\omega_{10}(x_A-x_{A_0})+\omega_{20}(x_B-x_A)=0;\\&v_{B32}^{x}=v_{B32}\cos(\pi-\psi);\ \ v_{B32}^{y}=v_{B32}\sin(\pi-\psi)\end{aligned} \qquad (d)$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{20}=\omega_{10}\frac{-(y_B-y_A)sin\psi+(x_B-x_A)cos\psi}{(y_A-y_{A_0})sin\psi-(x_A-x_{A_0})cos\psi} \qquad (e)$$

$$v_{B32}=\omega_{10}\frac{-(y_A-y_{A_0})(x_B-x_A)+(x_A-x_{A_0})(y_B-y_A)}{-(y_B-y_A)sin\psi+(x_B-x_A)cos\psi} \qquad (f)$$

Pentru al II-lea ciclu: $0 - B_{03} - 3 - B_{32} - 2 - C - 4 - D_{45} - 5 - D_{50} - 0$ ecuațiile (c) se scriu astfel:

$$\begin{aligned}&v_{B23}^{x}+v_{D05}^{x}-\omega_{20}(y_C-y_B)-\omega_{40}(y_D-y_C)=0;\\&v_{B23}^{y}+v_{D05}^{y}+\omega_{20}(x_C-x_B)-\omega_{40}(x_D-x_C)=0;\\&v_{B23}^{x}=v_{B23}\cos(\pi-\psi);v_{B23}^{y}=v_{B23}\sin(\pi-\psi);\ \ v_{D05}^{x}=0;\ \ v_{D05}^{y}=v_{D05}\end{aligned} \qquad (g)$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{40} = \omega_{20}\frac{(y_C - y_B)}{(y_D - y_C)} + v_{B32}\frac{cos\psi}{(y_D - y_C)} \tag{h}$$

$$v_{D50} = -v_{D05} = v_{B32}\,sin\psi + \omega_{20}(x_C - x_B) + \omega_{40}(x_D - x_C) \tag{i}$$

2. Analiza cinematică a accelerațiilor

Ecuațiile de condiție pentru viteze sub forma generală se scriu:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a^{tx}_{Ai,i-1} - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,0}(y_B - y_A) &= \sum_{i=1}^{n}\omega^2_{i,0}(x_B - x_A) - \sum_{i=1}^{n} a^{nx}_{Ai,i-1} + 2\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,0}v^{y}_{Ai,i-1}\\ \sum_{i=1}^{n} a^{ty}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,0}(x_B - x_A) &= \sum_{i=1}^{n}\omega^2_{i,0}(y_B - y_A) - \sum_{i=1}^{n} a^{ny}_{Ai,i-1} - 2\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,0}v^{x}_{Ai,i-1}\end{aligned} \tag{j}$$

Pentru *primul ciclu*: *0 - A_0 - 1 - A - 2 -B_{23} - 3 – B_{30} – 0* relațiile (j) se scriu astfel:

$$\begin{aligned}&a^{tx}_{B32} - \varepsilon_{10}(y_A - y_{A_0}) - \varepsilon_{20}(y_B - y_A) = \omega^2_{10}(x_A - x_{A_0}) + \omega^2_{20}(x_B - x_A) + 2\omega_{20}v^{y}_{B32}\\ &a^{ty}_{B32} + \varepsilon_{10}(x_A - x_{A_0}) + \varepsilon_{20}(x_B - x_A) = \omega^2_{10}(y_A - y_{A_0}) + \omega^2_{20}(y_B - y_A) - 2\omega_{20}v^{x}_{B32}\\ &a^{tx}_{B32} = a_{B32}\,cos(\pi - \psi);\quad a^{ty}_{B32} = a_{B32}\,sin(\pi - \psi);\quad \varepsilon_{10} = 0\end{aligned} \tag{k}$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned}\omega^2_{10}(x_A - x_{A_0}) + \omega^2_{20}(x_B - x_A) + 2\omega_{20}v^{y}_{B32} &= L_{1x}\\ \omega^2_{10}(y_A - y_{A_0}) + \omega^2_{20}(y_B - y_A) - 2\omega_{20}v^{x}_{B32} &= L_{1y}\end{aligned} \tag{l}$$

rezolvând aceast sistem se obține:

$$\varepsilon_{20} = \frac{L_{1x}\,sin\psi + L_{1y}\,cos\psi}{(y_B - y_A)sin\psi - (x_B - x_A)cos\psi} \tag{m}$$

$$a_{B32} = \frac{(x_B - x_A)L_{1x} + (y_B - y_A)L_{1y}}{(y_B - y_A)sin\psi - (x_B - x_A)cos\psi} \tag{n}$$

Pentru al II-lea ciclu: 0 – B_{03} - 3 – B_{32} - 2 - C - 4 – D_{45} - 5 - D_{50} - 0 ecuațiile (j) se scriu astfel :

$$\begin{aligned}&a^{tx}_{B23} + a^{tx}_{D05} - \varepsilon_{20}(y_C - y_B) - \varepsilon_{40}(y_D - y_C) = \omega^2_{20}(x_C - x_B) + \omega^2_{40}(x_D - x_C) = L_{2x}\\ &a^{ty}_{B23} + a^{ty}_{D05} + \varepsilon_{20}(x_C - x_B) + \varepsilon_{40}(x_D - x_C) = \omega^2_{20}(y_C - y_B) + \omega^2_{40}(y_D - y_C) = L_{2y}\\ &a^{tx}_{B23} = a_{B23}\,cos(\pi - \psi);\quad a^{tx}_{B23} = a_{B23}\,sin(\pi - \psi);\quad a^{tx}_{D05} = 0;\quad a^{ty}_{D05} = a_{D05} = -a_{D50}\end{aligned} \tag{o}$$

Rezolvând aceast sistem se obține:

$$\varepsilon_{40} = \frac{\varepsilon_{20}(y_C - y_B) + a_{B23}\,cos\psi + L_{2x}}{(y_D - y_C)} \tag{p}$$

$$a_{D50} = \varepsilon_{20}(x_C - x_B) + \varepsilon_{40}(x_D - x_C) + a_{B23}\,sin\psi - L_{2y}$$

Înlocuind valorile numerice se obţin următoarele rezultate:

$tg\psi = 0{,}3997\,;\ \psi = 21{,}7868^0\,;\ \ sin\,\theta = -0{,}22857;\ \theta = -13{,}213^0$.

Pentru coordonatele cuplelor cinematice se obţin valorile:

Cupla cinematică	A_0	*A*	*B*	*C*	*D*
x (mm)	*0*	*15*	*80*	*135,714*	*130*
y (mm)	*0*	*25,981*	*0*	*-22,269*	*2,069*

Înlocuind aceste valori în expresiile (e), (f), (h), (i) se obţin vitezele ω_{20}, v_{B32}, ω_{40}, $v_{D50.}$ şi în expresiile (m), (n), (p) se obţin acceleraţiile ε_{20}, a_{B32}, ε_{40}, $a_{D50.}$ cerute.

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *mecanismul din figurile 10.18. ... 24, din tabelul de mai jos având elementele geometrice şi mecanice specificate.* ***Se cer****: vitezele şi acceleraţiile punctelor A, B şi C*

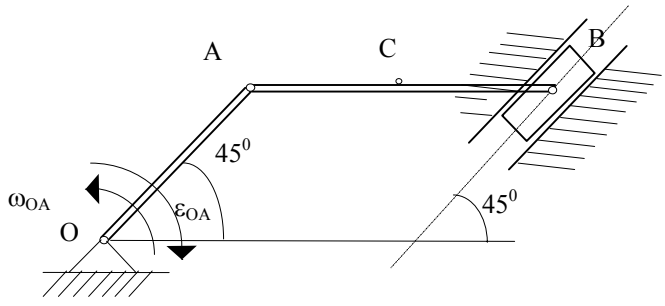


Fig 10.18

$OA = 2L,\ AB = 6L,\ AC = 3L\,(cm)$

$\omega_{OA} = 2\omega_0(s^{-1}), \varepsilon_{OA} = \omega_0^2(s^{-2})$

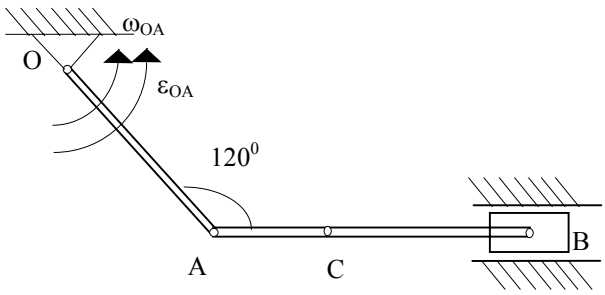


Fig. 10.19

$OA = 5L,\ AB = 7L, AC = 3L\,(cm)$

$\omega_{OA} = 2\omega_0(s^{-1}), \varepsilon_{OA} = 3\omega_0^2(s^{-2})$

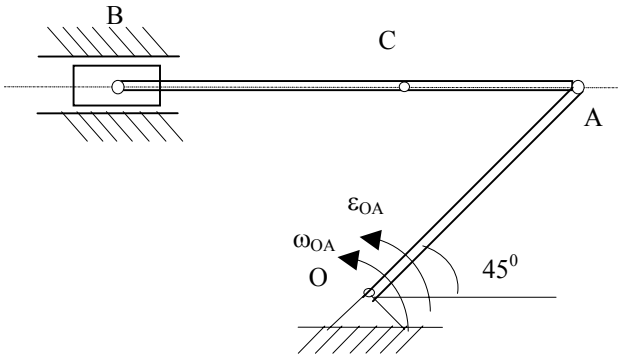


Fig. 10.20

$OA=35L,\ AB=75L,\ AC=60L(cm)$

$\omega_{OA}=5\omega_0(s^{-1}),\varepsilon_{OA}=10\omega_0^2(s^{-2})$

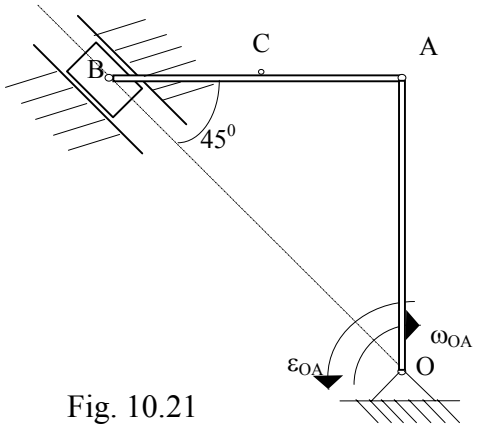


Fig. 10.21

$OA=AB=4L,\ AC=2L\ (cm)$

$\omega_{OA}=\omega_0\ (s^{-1})\ \varepsilon_{OA}=2\omega_0^2(s^{-2})$

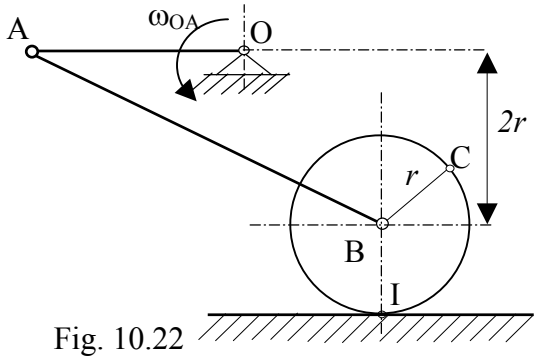


Fig. 10.22

$OA=23,\ AC=57,r=14\ (cm)$

$\omega_O=1{,}5(s^{-1})$

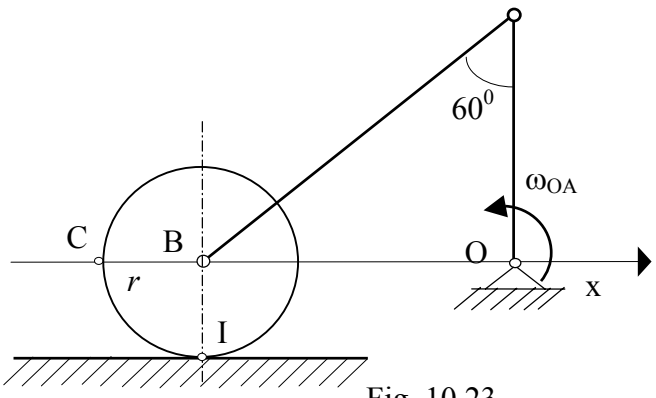


Fig. 10.23

$OA=25,\ AC=60,r=15\ (cm)$

$\omega_O=1{,}6(s^{-1})$

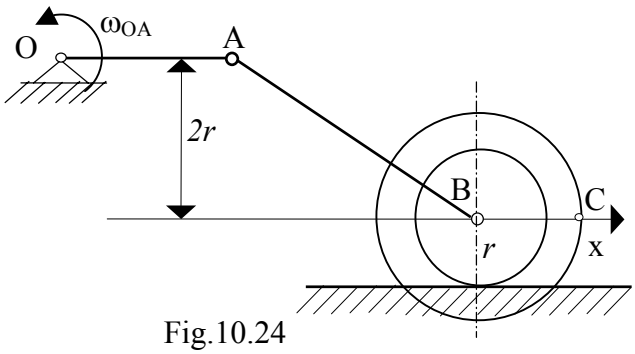


Fig.10.24

$OA = 16,\ AC = 60, r = 15\ (cm)$

$\omega_O = 1{,}6\,(s^{-1})$

Date: $A_0A = R = 20,\ A_0B = 60,\ \ A_0D = 50\ (cm)$

$\varphi = 45^0;\ \ \omega_{A_0A} = 1\,(s^{-1})\ ;\varepsilon_{A_0A} = 0$

Se cer: *vitezele şi acceleraţiile punctelor A şi C ,*

vitezele şi acceleraţiile unghiulare ale elementului BC

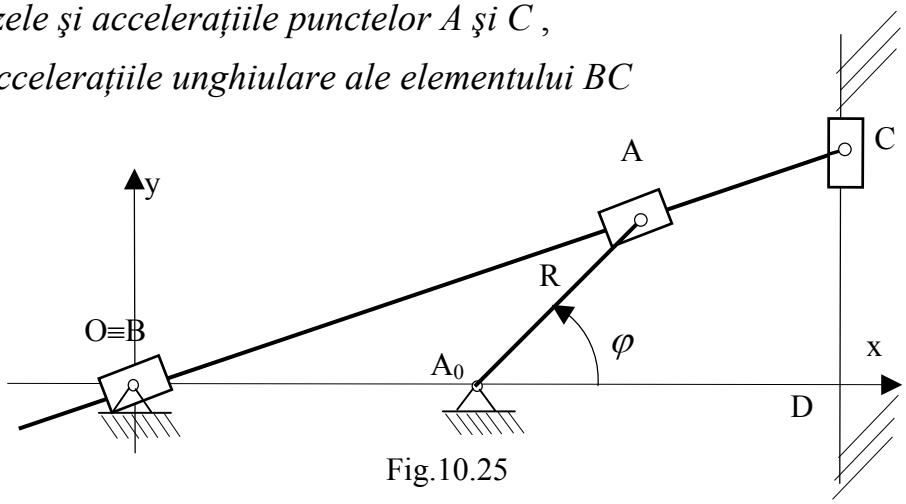


Fig.10.25

Date: $A_0A = R = 20,\ \ A_0B = 60,\ \ BC = 100;\ \ A_0D = 80\ (cm)$

$\varphi = 30^0;\ \ \omega_{A_0A} = 1\,(s^{-1})\ ;\ \ \varepsilon_{A_0A} = 0$

Se cer: *vitezele şi acceleraţiile punctelor A, B şi C ,*

vitezele şi acceleraţiile unghiulare ale elementului BC.

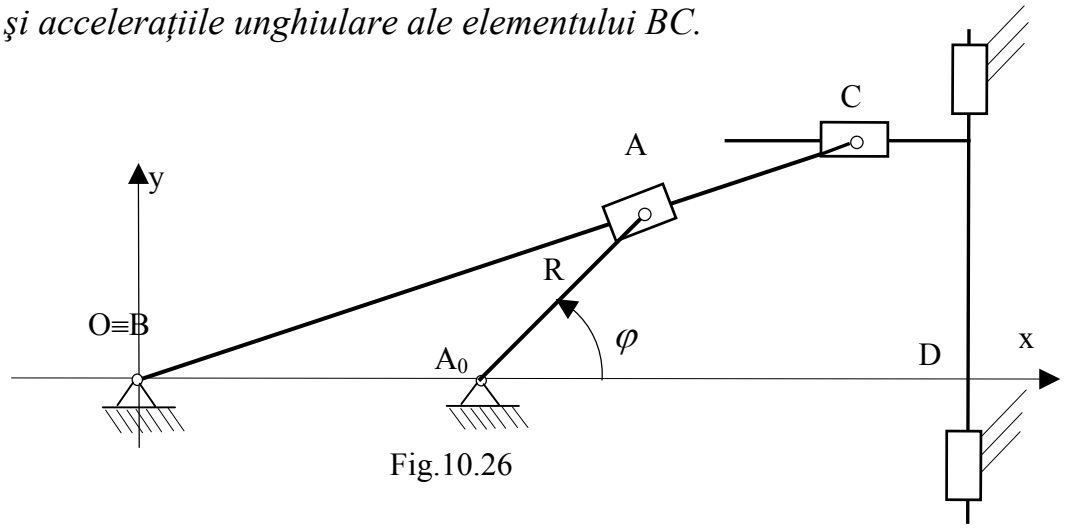


Fig.10.26

CAPITOLUL XI
CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

PROBLEME REZOLVATE

11.1 ***Se consideră*** *un cadru pătrat de latură 2a pe a cărui latură se află un tub, în interiorul căruia se deplasează un punct material (o bilă) M, plecând din* O *după legea:* $OM = s_r(t) = 18\sin\frac{\pi}{4}t$ *(cm). În acelaşi timp, cadrul se roteşte în planul său, în jurul colţului* O_1 *după legea:* $\varphi(t) = 2t^3 - t^2$ *(rad)*

Se cere *să se determine: viteza şi acceleraţia absolută a punctului material M pentru următorul caz particular:* $t_1 = \frac{2}{3}s$ *şi a=25 cm (fig.11.1).*

Rezolvare

1) Mişcarea punctului M în raport cu tub este *mişcarea relativă,* iar mişcarea de rotaţie a punctului M solidar legat de tub la un moment dat, în jurul punctului fix O_1 este *mişcarea de transport* . Legile de vartiaţie ale spaţiului pentru cele două mişcări sunt date prin enunţul problemei.

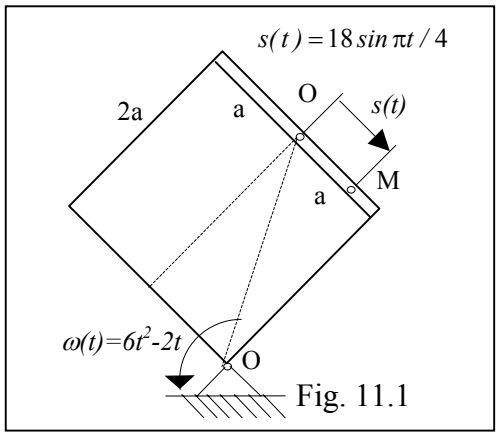


Fig. 11.1

- Vitezele: relativă, de transport şi absolută , se scriu :

$$v_r = \frac{\partial s_r}{\partial t} = \frac{9}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$v_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot O_1M = (6t^2 - 2t)\sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \quad \text{(a)}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 - 2v_r v_t\cos\alpha}$$

unde α se determină din iar din triunghiul dreptunghic O_1AM cu ajutorul relaţiilor:

$$\cos\alpha = \frac{O_1A}{O_1M} = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2}}; \quad \text{(b)}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

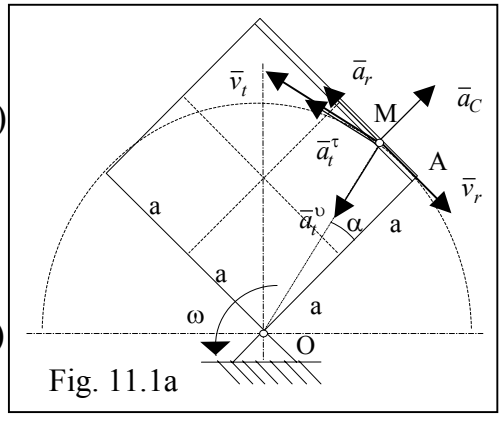


Fig. 11.1a

- Viteza şi acceleraţia unghiulară a cadrului:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 2t \qquad rad/s$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 12t - 2 \quad rad/s^2 \quad \text{(c)}$$

- Accelerația relativă este: $a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{9\pi^2}{8} sin\frac{\pi}{4} t$ (d)

- Accelerația Coriolis se scrie: $\overline{a}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$ şi deoarece $\overline{\omega} \perp \overline{v}_r$ avem:

$$\overline{a}_C \perp \overline{v}_r, \quad a_c = 2\omega \cdot v_r = 18\pi t(3t-1) \cdot cos(\pi t/4) \qquad (e)$$

- Accelerația de transport are două componente:

$$\overline{a}_t^{\upsilon} = -\overline{O_1 M} \cdot \omega^2 \quad si \quad \overline{a}_t^{\upsilon} = \overline{\varepsilon} \times \overline{O_1 M}$$ şi deoarece $\overline{\varepsilon} \perp \overline{O_1 M}$ avem:

$$a_t^{\upsilon} = \sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \cdot \omega^2 \quad si \quad a_t^{\tau} = \sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \cdot \varepsilon \qquad (f)$$

Proiectând pe axele Ox şi Oy relația vectorală de compunere a acceleraţiilor: $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t^{\tau} + \overline{a}_t^{\upsilon} + \overline{a}_c$ se obține valoarea acceleraţiei absolute:

$$\begin{cases} a_{ax} = -a_r - a_t^{\tau} cos\alpha + a_t^{\upsilon} sin\alpha \\ a_{ay} = -a_t^{\tau} sin\alpha - a_t^{\upsilon} cos\alpha + a_c \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \qquad (g)$$

2) Pentru cazul particular $t = t_1 = \frac{2}{3} s$ şi *a=25 cm,* înlocuind în relaţiile de mai sus se obţin valorile :

$cos\ \alpha$	$sin\ \alpha$	O_1M	s	ω	ε	v_r	v_t	v_a	a_r	a_C	a^{υ}_t	a^{τ}_t
-	-	*cm*	*cm*	s^{-1}	s^{-2}	*cm/s*	*cm/s*	*cm/s*	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2
0,95	0,31	52,5	9	1,33	6	12,24	70	58,5	5,55	32,6	93,3	315

$$\begin{cases} a_{ax} = -a_r - a_t^{\tau} cos\alpha + a_t^{\upsilon} sin\alpha = -276 \\ a_{ay} = -a_t^{\tau} sin\alpha - a_t^{\upsilon} cos\alpha + a_c = -154 \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \cong 316\ cm/s^2 \qquad (h)$$

11.2 ***Se consideră*** *cadrul triunghiular din figura 11.2 şi un punct material M care se deplasează în interiorul tubului solidar cu cadrul, înclinat faţă de verticală cu unghiul* $\alpha = 30^0$. *Se cunosc legile pentru cele două mişcări:*

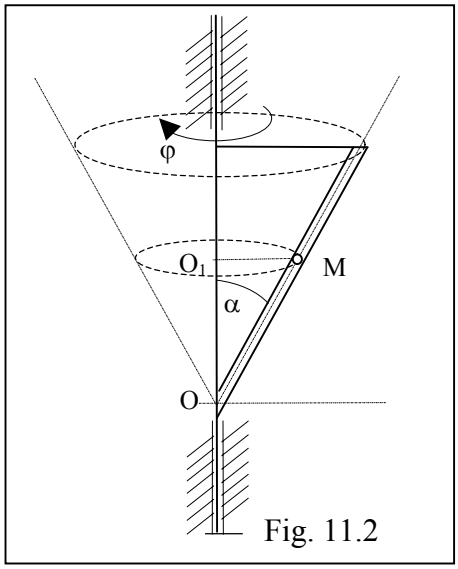


Fig. 11.2

- relativă: $s_r = OM = 16 - 8cos(3\pi t)$ *(cm) .*

- de transport care se roteşte cadrul în jurul axei verticale: $\varphi = 0{,}9t^2 - 9t^3 rad$.

Se cere*: Să se determine poziţia punctului M, viteza absolută* (v_a) *şi acceleraţia absolută* (a_a) *la momentul* $t = t_1 = \frac{2}{9} s$.

Rezolvare :

- Vitezele: relativă, de transport şi absolută (fig. 11.1.a), se scriu :

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial s_r}{\partial t} = 24\pi \sin 3\pi t \\ v_t = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot O_1M = (1{,}8t - 27t^2)\sin\alpha \end{cases} \qquad (a)$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$

- Viteza şi acceleraţia unghiulară a cadrului:

$$\omega = \dot{\varphi} = 1{,}8t - 27t^2 \qquad rad/s$$
$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 1{,}8 - 54t \;\; rad/s^2 \qquad (b)$$

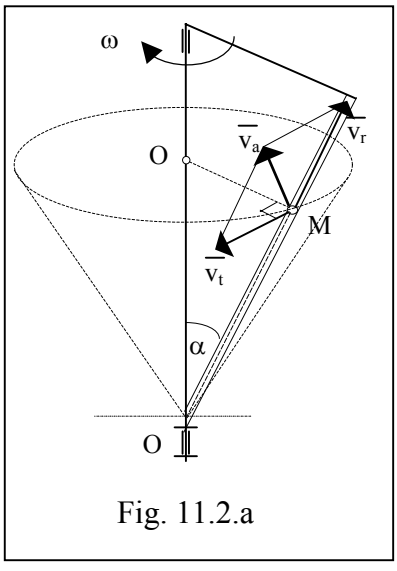


Fig. 11.2.a

- Acceleraţia relativă : $a_r = \dfrac{\partial v_r}{\partial t} = 72\pi^2 \cos 3\pi t$ (c)

- Acceleraţia Coriolis se scrie:

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \Rightarrow a_C = 2\omega v_r \sin(180 - \alpha) \qquad (d)$$

- Acceleraţia de transport are două componente:

$$\bar{a}_t^{\upsilon} = -\overline{O_1M} \cdot \omega^2 \;\; si \;\; \bar{a}_t^{\upsilon} = \bar{\varepsilon} \times \overline{O_1M} \qquad (e)$$

şi deoarece $\bar{\varepsilon} \perp \overline{O_1M}$ avem:

$$\begin{cases} a_t^{\upsilon} = O_1M \cdot \omega^2 = s \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2 \\ a_t^{\upsilon} = O_1M \cdot \varepsilon = s \cdot \sin\alpha \cdot \varepsilon \end{cases} \qquad (f)$$

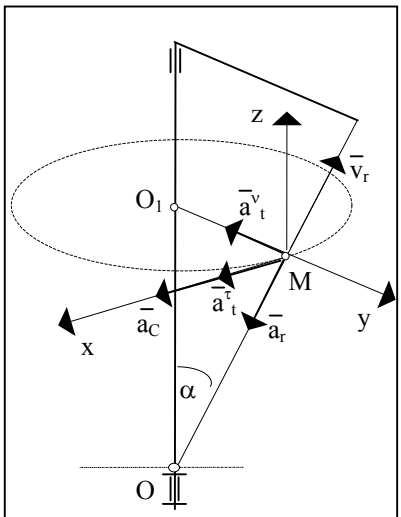


Fig. 11.2.b

Proiectând relaţia vectorială dintre acceleraţii pe axele de coordonate $(Mxyz)$, ca în fig. 11.2.b se obţin relaţiile şi valorile :

$$a_x = a_t^{\upsilon} + a_c$$
$$a_y = a_t^{\upsilon} - a_r^{\tau} \cos 60^0 \qquad (g)$$
$$a_y = -a_r^{\tau} \sin 60^0$$

3) Pentru cazul particular $t = t_1 = \dfrac{2}{9}s$ şi $\alpha = 30^0$, înlocuind în relaţiile de mai sus se obţin valorile din tabelul următor:

ω	v_r	v_t	v_a	ε	a^{υ}_t	a^{τ}_t	a^{υ}_r	a^{τ}_r	a_C	a_a
s^{-1}	cm/s	cm/s	cm/s	s^{-2}	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2
-0,93	65,2	9,3	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	345

11.3 ***Se consideră*** *cadrul dreptunghiular ABCD (AD=a) din figura 11.3 care se roteşte cu* $\omega=\omega_0$ *(=constant) şi un punct material M care cade liber (cu acceleraţia g) în interiorul tubului CD solidar cu cadrul, paralel cu axa verticală de rotaţie.* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută* (v_a) *şi acceleraţia absolută* (a_a) *la momentul t.*

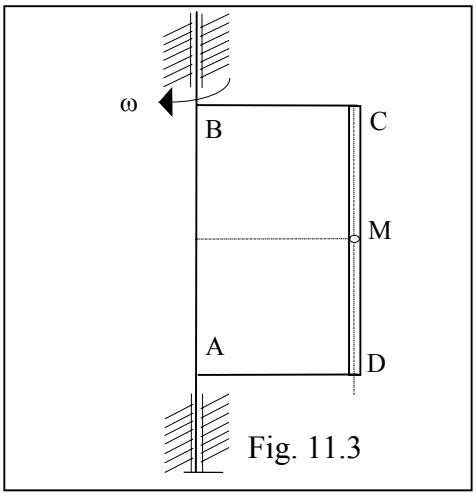


Fig. 11.3

Rezolvare :

Se aleg axele fixe şi mobile ca în fig.11.3.a. Sistemul mobil se roteşte în acelaşi timp cu cadrul dreptunghiular în jurul lui AB.

Mişcarea relativă a puctului M în tubul CD este dată de legea : $CM=\dfrac{gt^2}{2}$, iar mişcarea de rotaţie a lui M (considerat fix pe cadru) de rază a şi viteză unghiulară ω_0 este mişcarea de transport .

Calculul vitezei absolute la momentul t :

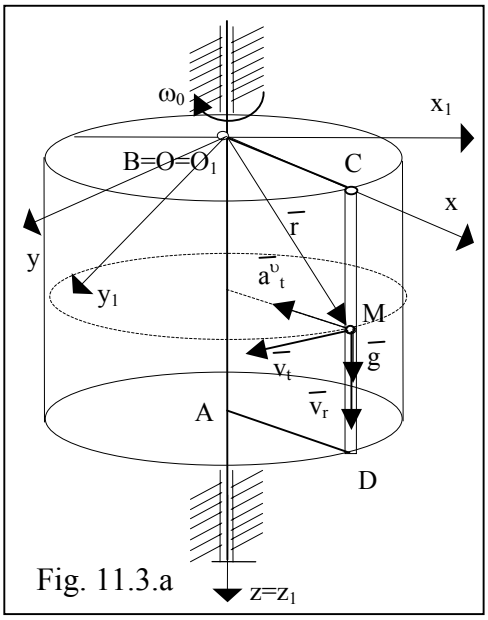


Fig. 11.3.a

$$\bar{r}=\overline{BM}=a\bar{i}+\frac{gt^2}{2}\bar{k}$$

$$\bar{v}_0=0,\quad \bar{a}_0=0, \qquad (a)$$

$$\bar{\omega}=\omega_0\bar{k}\,,\quad \bar{\varepsilon}=0\,;$$

$$\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t$$

unde (b)

$$\begin{cases}\bar{v}_r=\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial t}=gt\bar{k}\\ \bar{v}_t=\bar{\omega}\times\bar{r}=\omega_0\bar{k}\times\left(a\bar{i}+\dfrac{gt^2}{2}\bar{k}\right)=\omega_0 a\bar{j}\end{cases}$$

$$\bar{v}_a=\omega_0 a\bar{j}+gt\bar{k}\Rightarrow v_a=\sqrt{a^2\omega_0^2+g^2t^2} \qquad (c)$$

Calculul acceleraţiei absolute la momentul t :

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_C\,,\quad \textit{unde:}$$

$$\bar{a}_r=\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial t}=g\bar{k}\,; \qquad (d)$$

$$\bar{a}_t=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)=\omega_0\bar{k}\times\omega_0 a\bar{j}=-\omega_0^2 a\bar{i}\Rightarrow a_t^{\tau}=0,\quad a_t^{\upsilon}=\omega^2 a$$

$$\bar{a}_C=2\bar{\omega}\times\bar{v}_r=2\omega_0\bar{k}\times gt\bar{k}=0$$

Rezultă : $\bar{a}_a=g\bar{k}-\omega_0^2 a\bar{i}$ este cuprinsă într-un plan meridian al cilindrului şi are valoarea constantă: $a_a=\sqrt{g^2+\omega^4a^2}$. (e)

11.4 ***Se consideră*** *cadrul semicircular AB de rază R din figura 11.4 care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega=\omega_0$ (constantă) în jurul unui diametru vertical şi un punct material M care se deplasează pe arcul AB solidar cu cadrul plecând din M_0, cu viteza constantă v_0 (constantă).* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută (v_a) şi acceleraţia absolută (a_a) la momentul t.*

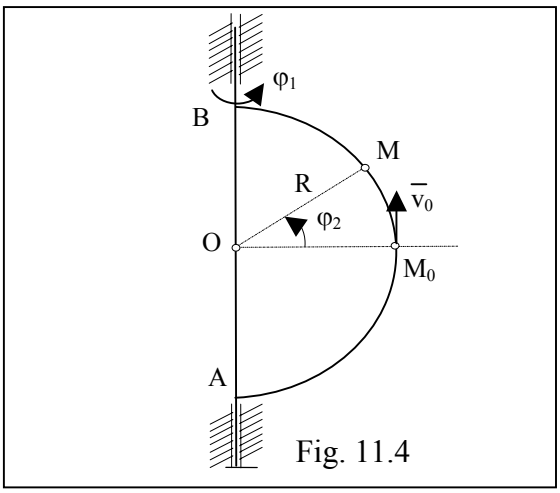


Fig. 11.4

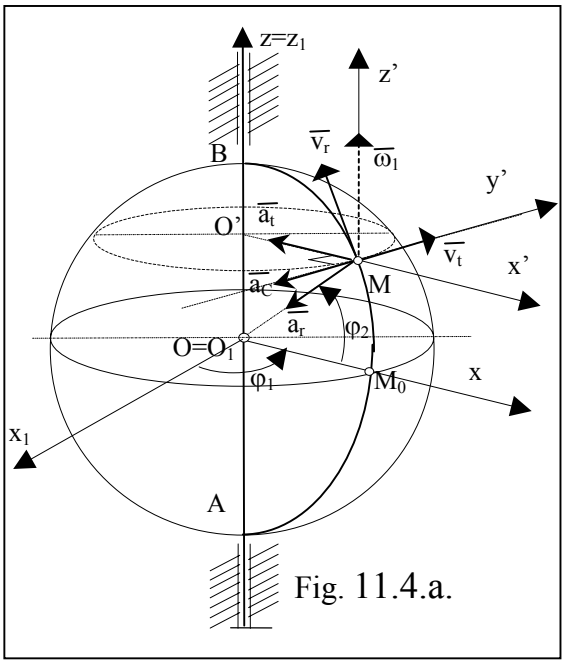


Fig. 11.4.a.

Rezolvare:

Punctul *M*, în mişcarea sa relativă pleacă din M_0 şi parcurge unghiul la centru φ_2, şi în acelaşi timp arcului semicircular se roteşte în mişcarea sa de transport cu unghiul φ_1. Vitezele unghiulare respective sunt: $\omega_1=\omega_0$ respectiv $\omega_2=v_0/R$ iar acceleraţiile unghiulare: $\varepsilon_2=0,\ \varepsilon_1=0$. Se aleg cele două sisteme de axe (sistemul fix $O_1x_1y_1$ şi mobil Oxy) ca în figura 11.4.a.

Viteza absolută : $\overline{v}_a=\overline{v}_r+\overline{v}_t$ (a)

unde vectorii $\overline{v}_r,\overline{v}_t$ au direcţiile şi sensurile din fig. 11.4.a., conform definiţiei lor, iar mărimile sunt :

$$v_r=v_0,\quad v_t=O'M\cdot\omega_1=R\omega_0\cos\varphi_2$$

$$\Rightarrow v_a=\sqrt{v_r^2+v_t^2}=\sqrt{v_0^2+\omega_0^2R^2\cos^2\varphi_2} \quad \text{(b)}$$

Acceleraţia absolută: $\overline{a}_a=\overline{a}_r+\overline{a}_t+\overline{a}_C$

Întrucât acceleraţiile unghiulare $\varepsilon_1=0,\quad \varepsilon_2=0,$ rezultă că acceleraţiile $\overline{a}_r,\overline{a}_t$ au decât componentele normale diferite de zero, cele tangenţiale fiind nule

$$a_r=a_r^{\upsilon}=\frac{v_r^2}{R}=\frac{v_0^2}{R},\qquad a_t=a_t^{\upsilon}=O'M\cdot\omega_1^2=R\omega_0^2\cos\varphi_2 \quad \text{(c)}$$

$$\overline{a}_c=2\overline{\omega}_t\times\overline{v}_r\Rightarrow a_c=2\omega_0v_0\sin\varphi_2$$

Mărimea acceleraţiei absolute se obţine proiectând pe trei axe *Mx'y'z'* astfel:

$$a_x=-a_r\cos\varphi_2-a_t=-\frac{v_0^2}{R}\cos\varphi_2-R\omega_0^2\cos\varphi_2=-\left(\frac{v_0^2}{R}+R\omega_0^2\right)\cos\varphi_2$$

$$a_y=-a_c=-2\omega_0v_0\sin\varphi_2;\quad a_z=-a_r\sin\varphi_2=-\frac{v_0^2}{R}\sin\varphi_2 \quad \text{(d)}$$

$$a_a=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R}+R\omega_0^2\right)^2\cos^2\varphi_2+\left(4\omega_0^2v_0^2+\frac{v_0^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi_2}$$

11.5. ***Se consideră*** *un cursor M care pleacă din A având viteza inițială zero pe un inel circular AB de rază R=OM cu viteza unghiulară* $\omega_r=\omega_1=\varepsilon_1 t$ *(*ε_1*=constant) iar inelul se rotește în jurul diametrului vertical AB cu viteza unghiulară* $\omega_t=\omega_2=\varepsilon_2 t$ *(*ε_2*=constant) ca în figura 11.5.* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută* (v_a) *și accelerația absolută* (a_a) *la momentul t oarecare.*

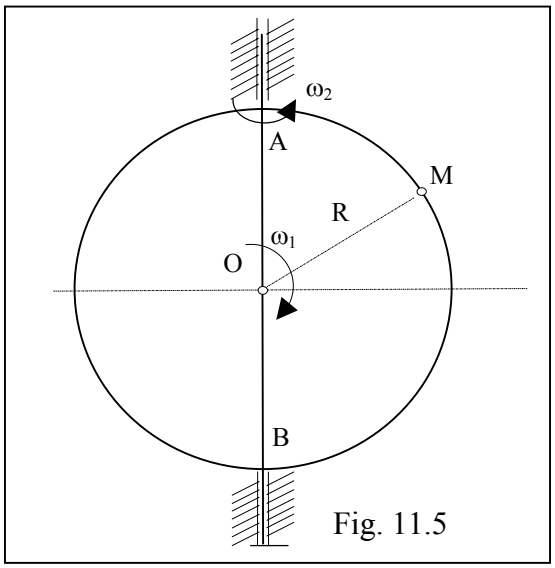


Fig. 11.5

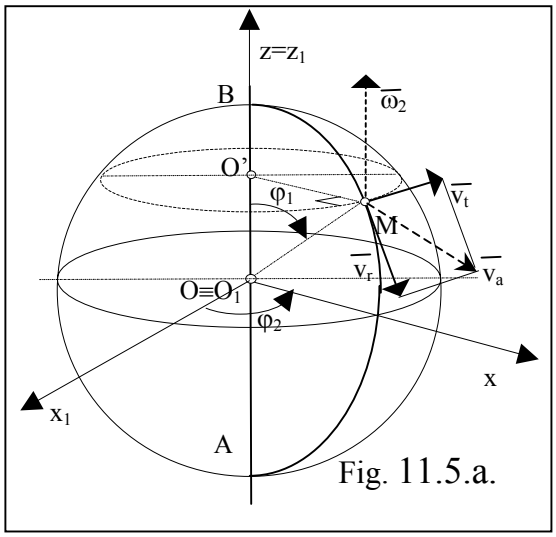


Fig. 11.5.a.

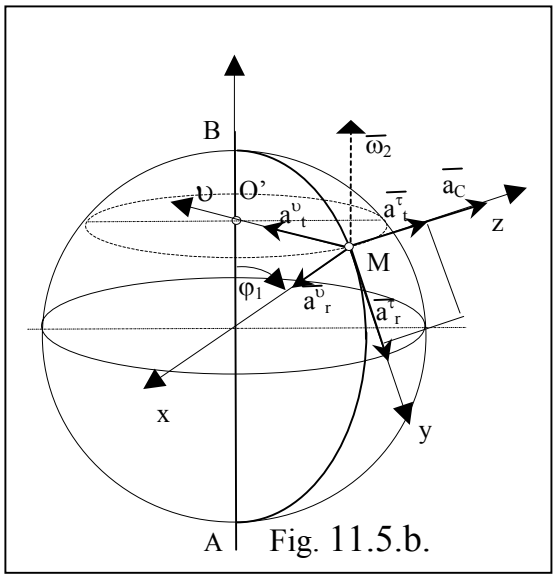


Fig. 11.5.b.

Rezolvare:

Punctul *M*, în *mișcarea sa relativă* pleacă din A și parcurge inelul circular cu viteza unghiulară $\omega_r=\omega_1=\varepsilon_1 t$, și în același timp inelul circular se rotește în jurul diametrului vertical AB în *mișcarea sa de transport* cu viteza unghiulară $\omega_t=\omega_2=\varepsilon_2 t$; accelerațiile unghiulare sunt constante: $\varepsilon_2 = ct.,\ \varepsilon_1 = ct.$. Se aleg cele două sisteme de axe (fix $O_1x_1y_1$ și mobil Oxy) ca în figura 11.5.a.

a. Calculul vitezei absolute:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad (a)$$

unde vitezele $\bar{v}_r, \bar{v}_t$ au direcțiile și sensurile din fig. 11.5.a, fiind perpendiculare și având mărimile:

$v_r = R\omega_1,\quad v_t = R\omega_2 \sin\varphi_1$, deci:

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2\varphi_1} \qquad (b)$$

unde: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 t^2$ (deoarece punctul pleacă din A având viteza inițială zero)

b. Calculul accelerației absolute :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \qquad (c)$$

Întrucât accelerațiile unghiulare sunt nenule ($\varepsilon_1 \neq 0,\ \ \varepsilon_2 \neq 0$), rezultă că accelerațiile $\bar{a}_r, \bar{a}_t$ au atât componentele normale cât și tangențiale:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\upsilon} + \bar{a}_r^{\tau};\quad a_r^{\upsilon} = R\omega_1^2,\quad a_r^{\tau} = R\varepsilon_1$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\upsilon} + \bar{a}_t^{\tau};\quad a_t^{\upsilon} = R\sin\varphi_1 \cdot \omega_2^2;\ a_r^{\tau} = R\sin\varphi_1 \cdot \varepsilon_2 \qquad (d)$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_r \Rightarrow a_c = 2R\omega_2\omega_1 \sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pentru a determina mărimea acceleraţiei absolute se proiectează relaţia (b) pe cele trei axe de coordonate *Mx, My, Mz* din fig. 11.5.b, astfel încât avem:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r^{\upsilon} + a_t^{\upsilon}\, sin\varphi_1 = R\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\, sin^2\varphi_1\right) \\ a_y &= a_r^{\tau} - a_t^{\upsilon}\, cos\varphi_1 = R\left(\varepsilon_1 - \omega_2^2\, sin\varphi_1\, cos\varphi_1\right) \\ a_z &= a_t^{\tau} + a_C = R\left(\varepsilon_2\, sin\varphi_1 + 2\omega_1\omega_2\, cos\varphi_1\right) \\ a_a &= R\sqrt{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\, sin^2\varphi_1\right)^2 + \left(\varepsilon_1 - \omega_2^2\, sin\varphi_1\, cos\varphi_1\right)^2 + \left(\varepsilon_2\, sin\varphi_1 + 2\omega_1\omega_2\, cos\varphi_1\right)^2} \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

11.6 ***Se consideră*** *un cursor M care se deplasează pe bara cotită O_1OA ($\angle O_1OA=90^0$, $O_1O=a=20cm$) după legea $OM=s_r(t)=20\sin\pi t$ (cm) . În acelaşi timp bara se roteşte în jurul punctului fix O_1 după legea: $\varphi(t)=t-0{,}5t^2$, în sens trigonometric ca în figura 11.6.a.* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută (v_a) şi acceleraţia absolută (a_a) la momentul $t_1=1/3$ s*

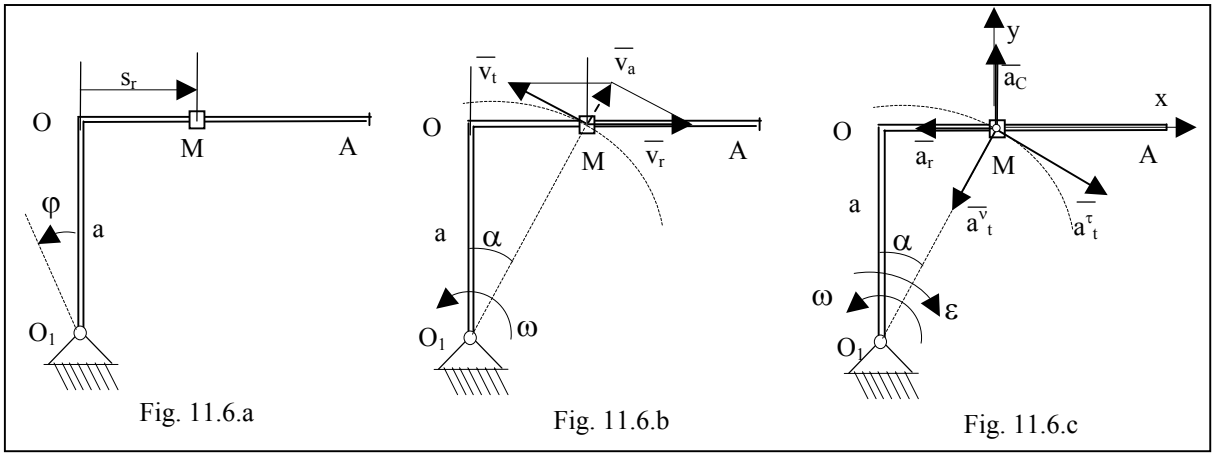


Fig. 11.6.a Fig. 11.6.b Fig. 11.6.c

Rezolvare:

Mişcarea relativă este mişcarea rectilinie a cursorului M de la O spre A conform legii date $s_r(t)=20\sin\pi t$

Mişcarea de transport este mişcarea punctului M al cadrului care coincide cu cursorul pentru momentul considerat (sau mişcarea cursorului împreună cu cadrul dacă încetează mişcarea relativă), deci o mişcare circulară $\varphi_t(t)=t-0{,}5t^2$ cu viteza şi acceleraţia unghiulară: $\omega=1-t$; $\varepsilon=-1$, pe cercul de rază: $O_1M=\sqrt{a^2+s_r^2}$

Viteza absolută este dată de relaţia vectorială: $\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t$ (a)

unde vitezele $\bar{v}_r,\bar{v}_t$ au direcţiile şi sensurile din fig. 11.6.b, având mărimile:

$$v_r=\dot{s}_r=20\pi cos\pi t,\quad v_t=O_1M\cdot\omega=(1-t)\sqrt{a^2+(20sin\pi t)^2}$$

$$\Rightarrow v_a=\sqrt{v_r^2+v_r^2+2v_rv_t\,cos(\pi-\alpha)} \qquad \text{(b)}$$

$$v_a=\sqrt{(20\pi cos\pi t)^2+(1-t)^2\left[a^2+(20sin\pi t)^2\right]-40\pi\cdot cos\alpha\cdot cos\pi t\cdot(1-t)\cdot\sqrt{a^2+(20sin\pi t)^2}}$$

unde α este unghiul OO_1M, conform *fig. 11.6.b,c:* $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+s^2}$

Accelerația absolută este dată de relația vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \qquad (c)$$

unde accelerațiile unghiulare au sensurile şi direcțiile prezentate în fig. 11.6.c, şi mărimile date de:

$$\begin{aligned} &a_r = \dot{v}_r = \ddot{s}_r \quad \Rightarrow a_r = \left|-20\pi^2 \sin\pi t\right|, \\ &\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\upsilon} + \bar{a}_t^{\tau};\ \ a_t^{\upsilon} = \omega^2 \cdot O_1M = (1-t)^2 \cdot \sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2}\,; \\ &\qquad\qquad a_r^{\tau} = \left|\varepsilon \cdot O_1M\right| = \sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2} \\ &\bar{a}_C = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r \Rightarrow a_c = \left|40\pi\omega\cdot\sin\pi t\right| \end{aligned} \qquad (d)$$

Pentru a determina mărimea accelerației absolute se proiectează relația (b) pe cele două axe de coordonate *Mx* şi *My* din fig. 11.6.c, astfel încât avem:

$$\begin{cases} a_x = -a_r - a_t^{\upsilon}\sin\alpha + a_t^{\tau}\cos\alpha \\ a_y = a_C - a_t^{\upsilon}\cos\alpha - a_t^{\tau}\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (e)$$

Înlocuind în relațiile de mai sus *t=1/3 s* se obțin valorile numerice din tabelul următor:

v_r	v_t	v_a	a_r	a^{τ}_t	a^{υ}_t	a_C	a_{ax}	a_{ay}	a_a
cm/s	*cm/s*	*cm/s*	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2	cm/s^2
31,416	17,638	21,455	170,95	26,457	11,76	41,888			

11.7 ***Se consideră*** *un cursor M care se deplasează pe un cadru circular de rază R, cu viteză relativă constantă u=const., pornind la momentul inițial din punctul A diametral opus punctului O_1. În acelaşi timp cadrul se roteşte în jurul punctului fix O_1 viteza unghiulară constantă ω=const., în sens trigonometric ca în figura 11.7.a.* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută* (v_a) *şi accelerația absolută* (a_a) *la momentul t.*

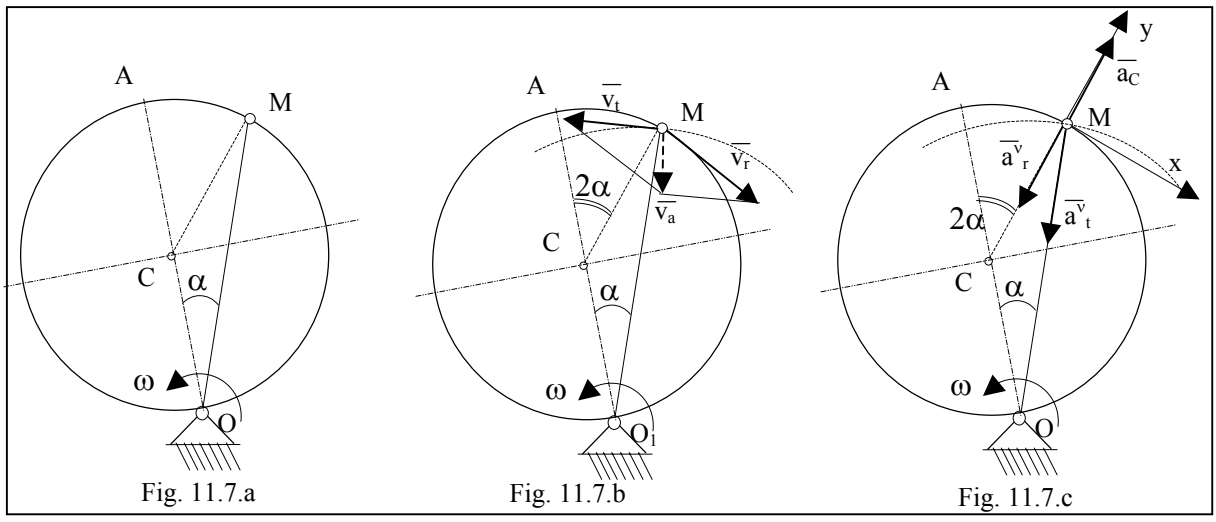


Fig. 11.7.a Fig. 11.7.b Fig. 11.7.c

Rezolvare:

Mişcarea relativă este mişcarea circulară a cursorului M pe cadrul circular în sensul acelor de ceas, pornind din A cu viteza constantă $v_r=u$.

Mişcarea de transport este mişcarea punctului M al cadrului care coincide cu cursorul pentru momentul considerat (sau mişcarea cursorului împreună cu cadrul circular dacă încetează mişcarea relativă), deci o mişcare circulară având viteza unghiulară $\omega=constant$ şi acceleraţia unghiulară $\varepsilon=0$, pe cercul de rază: $O_1M = 2R\cos\alpha$, unde $2\alpha = \frac{s}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{u}{2R}t$

Viteza absolută este dată de relaţia vectorială: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ (a)

unde vitezele $\bar{v}_r, \bar{v}_t$ au direcţiile şi sensurile din fig. 11.7.b, având mărimile:

$$\begin{aligned} &v_r = u; \qquad v_t = O_1M \cdot \omega = 2R\cos\alpha \cdot \frac{u}{R} = 2\cos\alpha \cdot u \\ &\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_r^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha)} = u\sqrt{1 + 4\cos^2\alpha} \end{aligned} \tag{b}$$

Acceleraţia absolută este dată de relaţia vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \tag{c}$$

unde acceleraţiile unghiulare au sensurile şi direcţiile prezentate în fig. 11.7.c, şi mărimile date de:

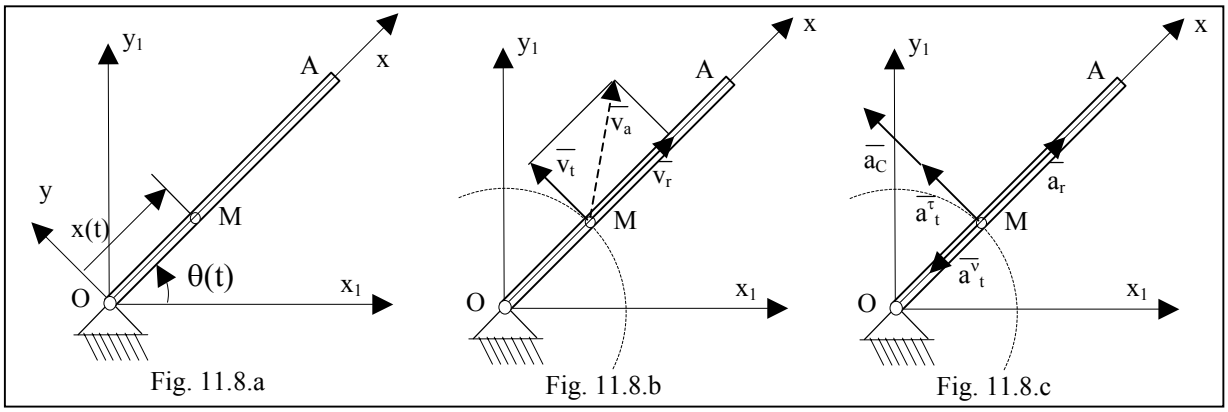
$$\begin{aligned} &\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\upsilon} + \bar{a}_r^{\tau}; \ \Rightarrow a_r^{\upsilon} = \omega_r \cdot R = \frac{u^2}{R}; \ a_r^{\tau} = \varepsilon_r \cdot R = 0 \\ &\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\upsilon} + \bar{a}_t^{\tau}; \ \Rightarrow a_t^{\upsilon} = \omega^2 \cdot O_1M = 2R\omega^2 \cdot \cos\alpha; \ a_r^{\tau} = \varepsilon \cdot O_1M = 0 \\ &\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r; \ \Rightarrow a_c = 2\omega \cdot u \end{aligned} \tag{d}$$

Pentru a determina mărimea acceleraţiei absolute se proiectează relaţia (b) pe cele două axe de coordonate *Mx* şi *My* din fig. 11.7.c, astfel încât avem:

$$\begin{aligned} &a_x = a_t^{\upsilon} \sin\alpha = R\omega^2 \sin 2\alpha \\ &a_y = a_C - a_t^{\upsilon}\cos\alpha - a_r^{\upsilon} = 2\omega u - 2R\omega^2\cos^2\alpha - \frac{u^2}{R} \\ &a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &a_a = \sqrt{\left(R\omega^2 \sin 2\alpha\right)^2 + \left(2R\omega^2\cos^2\alpha - \frac{u^2}{R}\right)^2} \end{aligned} \tag{e}$$

11.8 ***Se consideră*** *un tub OA care se roteşte în sens trigonometric în jurul punctului fix O după legea θ= θ(t). În acelaşi timp o bilă M se deplasează în interiorul tubului din O spre A, după legea: x=x (t), ca în figura 11.8.a.*

Se cere *să se determine viteza absolută* (v_a) *şi acceleraţia absolută* (a_a) *la momentul t.*



Rezolvare:

Se consideră sistemele de axe: fix $O_1x_1y_1$ şi mobil Oxyz. Mişcarea absolută a punctului M este reprezentată de ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta \\ y_1 = x\sin\theta \end{cases} \qquad (a)$$

Viteza absolută este dată de relaţia vectorială: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ (b)

unde vitezele $\bar{v}_r, \bar{v}_t$ sunt perpendiculare având direcţiile şi sensurile din fig. 11.8.b şi mărimile:

$$v_r = \dot{x};\ \ v_t = O_1M\cdot\omega = x\cdot\dot{\theta}$$
$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{x^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2} \qquad (c)$$

Acceleraţia absolută este dată de relaţia vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \qquad (d)$$

unde acceleraţiile unghiulare au sensurile şi direcţiile prezentate în fig. 11.8.c, şi mărimile date de:

$$a_r = \dot{v}_r = \ddot{x}$$
$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^{\upsilon} + \bar{a}_t^{\tau};\ \ \Rightarrow a_t^{\upsilon} = \omega^2\cdot O_1M = x\cdot\dot{\theta}^2\ ;\ a_t^{\tau} = \varepsilon\cdot O_1M = x\cdot\ddot{\theta} \qquad (e)$$
$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r\ \ \Rightarrow a_c = 2\dot{x}\cdot\dot{\theta}$$

Pentru a determina mărimea acceleraţiei absolute se proiectează relaţia (d) pe cele două axe de coordonate *Mx* şi *My* din fig. 11.8.c, astfel încât avem:

$$a_x = a_r - a_t^{\upsilon} = \ddot{x} - x\dot{\theta}^2$$
$$a_y = a_C + a_t^{\tau} = 2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta} \qquad (f)$$
$$\Rightarrow a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}\right)^2}$$

11.9 ***Se consideră*** *o prismă de secţiune ABC având unghiul la vârf ABC=α şi înălţimea AC=h, având o mişcare de translaţie după după legea $x_A(t)=a_1t^2/2$; pe latura AB se deplasează punctul M după legea $AM=x(t)=at^2/2$, ca în figura 11.9.a.* ***Se cere*** *să se determine traiectoria punctului M, viteza absolută (v_a) şi acceleraţia absolută (a_a) la momentul t.*

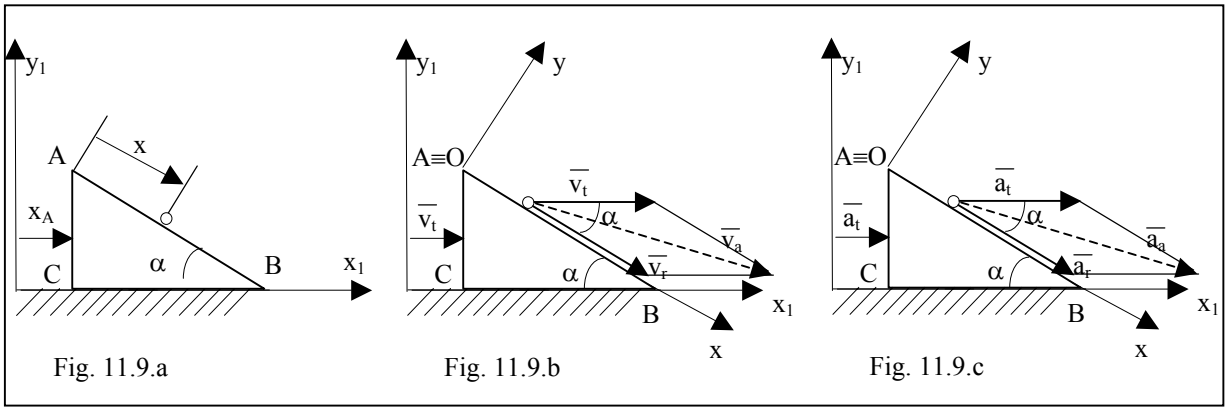


Fig. 11.9.a Fig. 11.9.b Fig. 11.9.c

Rezolvare:

Se consideră sistemele de axe: fix $O_1x_1y_1$ şi mobil Oxyz (fig. 11.8.b). Mişcarea relativă şi de transport a punctului M este dată de ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_r = \dfrac{1}{2}at^2; & x_A = x_t = \dfrac{1}{2}a_1t^2 \end{cases} \tag{a}$$

Viteza absolută este dată de relaţia vectorială: $\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t$

unde vitezele $\overline{v}_r, \overline{v}_t$ au direcţiile şi sensurile din fig. 11.9.b şi mărimile:

$$\begin{aligned} &v_r = \dot{x} = at; \quad v_t = \dot{x}_A = a_1t \\ &\Rightarrow v_a = \sqrt{v_t^2 + v_r^2 + 2v_rv_t\,cos\alpha} = t\cdot\sqrt{a^2 + a_1^2 + 2a\cdot a_1\cdot cos\alpha} \end{aligned} \tag{b}$$

Acceleraţia absolută este dată de relaţia vectorială: $\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_C$

unde acceleraţiile unghiulare au sensurile şi direcţiile prezentate în fig. 11.9.c, şi mărimile date de:

$$\begin{aligned} &a_r = \ddot{x} = a; \quad a_t = \ddot{x}_A = a_1; \quad a_C = 0 \\ &\Rightarrow a_a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2 + 2a_ra_t\,cos\alpha} = \sqrt{a^2 + a_1^2 + 2a\cdot a_1\cdot cos\alpha} \end{aligned} \tag{c}$$

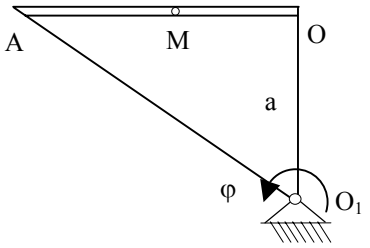
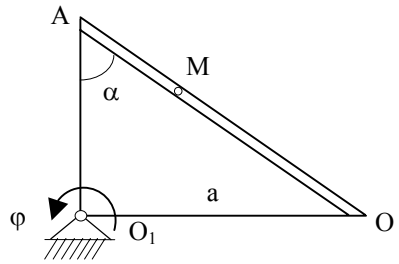
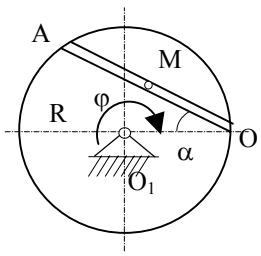
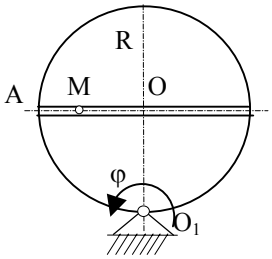
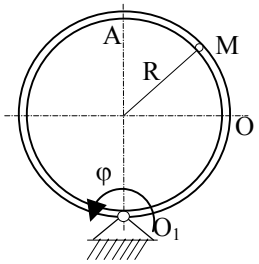
Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$\begin{cases} x_1 = x_A + x\,cos\alpha = \dfrac{1}{2}t^2\left(a_1 + a\,cos\alpha\right) \\ y_1 = h - x\,sin\alpha = h - \dfrac{1}{2}at^2\,sin\alpha \end{cases} \tag{d}$$

Eliminând timpul din cele două ecuaţii (d) se obţine ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul A(0,h): $y_1 + \dfrac{a\,sin\alpha}{a_1 + a\,cos\alpha}x_1 - h = 0$. (e)

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *un tub OA care se roteşte în sensul indicat în figura corespunzătoare în jurul punctului fix O_1 după legea $\varphi=\varphi(t)$. În acelaşi timp o bilă M se deplasează în interiorul tubului din O spre A, după legea: $s=s_r(t)$.* ***Se cere*** *să se determine viteza absolută (v_a) şi acceleraţia absolută (a_a) la momentul t_1 specificat pentru fiecare caz în parte*

Nr.probl.	Figura problemei	Datele problemei
11.10		$OM = s_r(t) = 25\sin\frac{\pi}{3}t \ \ (cm)$ $\varphi = 2t^2 - 0{,}5t \qquad (rad)$ $a = 25\ (cm);$ $t_1 = 2\ s$
11.11		$OM = s_r(t) = 5\sqrt{2}(t + t^2) \ \ (cm)$ $\varphi = 0{,}2t^3 + t \qquad (rad)$ $a = 60\ (cm);\ \alpha = 45^0$ $t_1 = 2\ s$
11.12		$OM = s_r(t) = 6\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{16}t \ \ (cm)$ $\varphi = 0{,}6t^2 \qquad (rad)$ $R = 36\ (cm);\ \alpha = 30^0$ $t_1 = 2\ s$
11.13		$OM = s_r(t) = 20\sin\pi t \ \ (cm)$ $\varphi = 0{,}4t^2 \qquad (rad)$ $R = 20\ (cm);$ $t_1 = 2/3 \quad s$
11.14		$OM = s_r(t) = 75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^2)\ (c$ $\varphi = 2t - 0{,}3t^2 \qquad (rad)$ $R = 30\ (cm);$ $t_1 = 1\ s$

CAPITOLUL XII
DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL

12.1. ***Se consideră*** *cadrul OABC din figura 12.1.a format dintr-un tub OA înclinat cu unghiul* α *faţă de axa de rotaţie, situat în plan vertical, care se roteşte în jurul axei verticale BC cu viteza unghiulară* ω=constant. *În acelaşi timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material* M *(o bilă) de masă* m*, pornind din punctul* O *fără viteză iniţială. Se mai cunosc lungimile* CO =a şi CB=h.

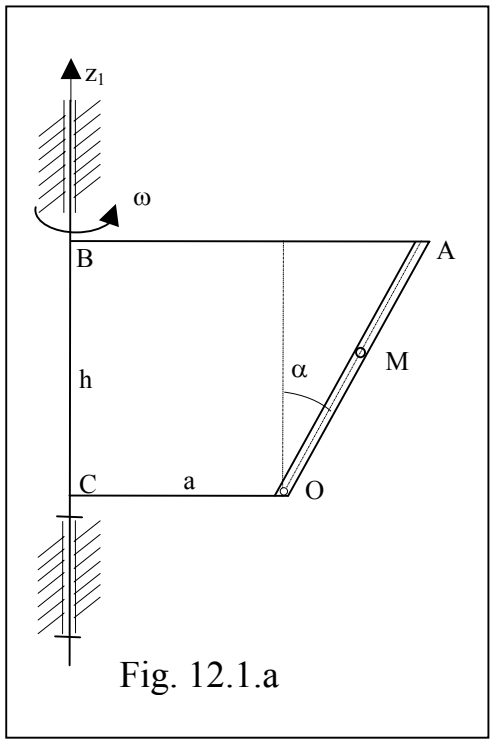


Fig. 12.1.a

Se cere:

1. *să se deducă ecuaţiile mişcării relative a punctului M în interiorul tubului şi soluţia ecuaţiei diferenţiale respective.*
2. *să se determine forţa de presiune pe care o exercită punctul M de masă m asupra pereţilor tubului.*
3. *Să se determine distanţa OM pentru poziţia de repaus relativ al punctului M faţă de tub*

Rezolvare:

Se aleg cele două sisteme de axe ca în fig. 12.1.a: *sistemul de axe fix* $O_1x_1y_1z_1$ şi *sistemul de axe mobil Oxyz* cu originea în punctul O astfel încât planul cadrului A'ABB' să coincidă cu planul Oxz şi Oy dat de regula şurubului drept.

Vectorii $\bar{r}, \bar{r}_o, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ se exprimă prin proiecţiile lor pe axele sistemului mobil Oxzy, astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \qquad \bar{r}_0 = \overline{CO} = a\sin\alpha\bar{i} - a\cos\alpha\bar{k}$$
$$\bar{\omega} = \omega\cos\alpha\cdot\bar{i} + \omega\sin\alpha\cdot\bar{k}; \qquad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \tag{a}$$

Expresiile analitice ale vitezei relative şi de transport se exprimă faţă de sistemul mobil Oxzy astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial\bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{\omega}\times\bar{r}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times a(\sin\alpha\cdot\bar{i} - \cos\alpha\cdot\bar{k}) +$$
$$+ \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(x\cdot\bar{i}) = \omega(a + x\sin\alpha)\bar{j} \tag{c}$$

Viteza de transport se poate scrie direct ea având acelaşi sens cu axa Oy şi fiind proporţională cu distanţa până la axa de rotaţie: $d = MM' = a + x\sin\alpha$.

Expresiile analitice ale acceleraţiei relativă, de transport şi Coriolis faţă de sistemul mobil Oxzy (fig. 12.1.b) sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(\omega a\cdot\bar{j}) + \tag{d}$$

$$+\omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(x\sin\alpha\,\bar{j}) \Rightarrow \bar{a}_t = \omega^2(x + a\sin\alpha)(\cos\alpha\cdot\bar{k} - \sin\alpha\cdot\bar{i})$$

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = 2(\omega\cos\alpha\cdot\bar{i} + \omega\sin\alpha\cdot\bar{k})\times(\dot{x}\bar{i}) = 2\omega\dot{x}\sin\alpha\cdot\bar{j}$$

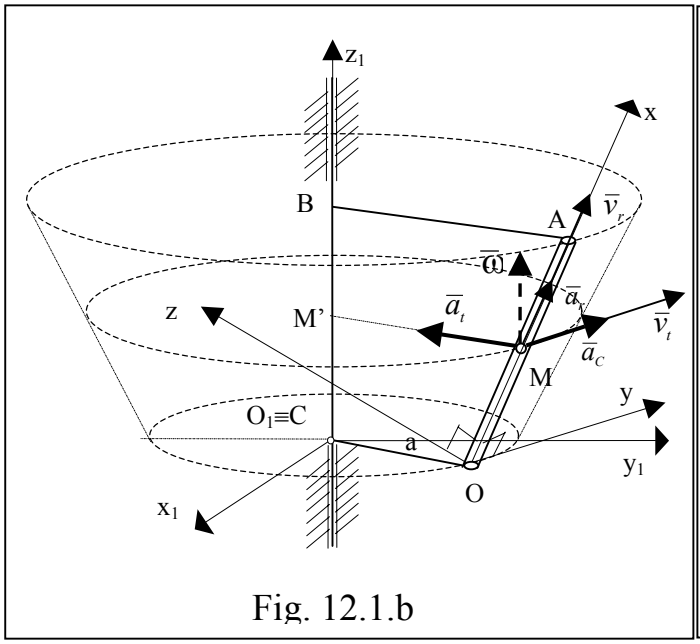


Fig. 12.1.b

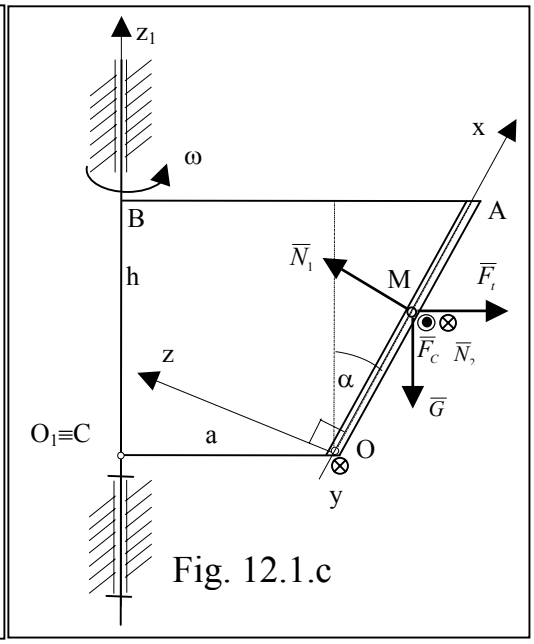


Fig. 12.1.c

Ecuaţia fundamentală a dinamicii mişcării relative a punctului material se scrie:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_C, \tag{e}$$

unde $\bar{F}$ reprezintă rezultanta forţelor efectiv aplicate şi de legătură, $\bar{F}_t$ forţa complementară de transport şi $\bar{F}_C$ forţa complementară Coriolis. Conform fig. 12.1.c expresiile analitice ale acestor forţe în proiecţii pe axele sistemului mobil Oxzy, sunt:

$$\begin{aligned}
&\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg\cos\alpha\cdot\bar{i} - mg\sin\alpha\cdot\bar{k} + N_1\bar{k} + N_2\bar{j}\\
&\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = m\omega^2(a + x\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha\,\bar{i} - \cos\alpha\cdot\bar{k})\\
&\bar{F}_C = -m\bar{a}_c = -2m\omega\,\dot{x}\,\sin\alpha\cdot\bar{j}
\end{aligned} \tag{f}$$

Ecuaţia fundamentală a dinamicii mişcării relative (e) se scrie astfel:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\bar{i} = &(-mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha)\bar{i} + (N_2 - 2m\omega\,\dot{x}\sin\alpha)\bar{j} +\\
&+(N_1 - mg\sin\alpha - m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha)\bar{k}
\end{aligned} \tag{f}$$

sau în proiecţii pe axe, sistemul de ecuaţii scalare:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2\left(a+x\sin\alpha\right)\sin\alpha-mg\cos\alpha \\ 0=N_2-2m\omega\dot{x}\sin\alpha \\ 0=N_1-mg\sin\alpha-m\omega^2\left(a+x\sin\alpha\right)\cos\alpha \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x}-\omega^2\sin^2\alpha\cdot x=-g\cos\alpha+a\,\omega^2\sin\alpha \quad (h)$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene (x_{om}) şi o soluție particulară a ecuației neomogene (x_p):

$$x=x_{om}+x_p=C_1e^{\omega t\sin\alpha}+C_2e^{-\omega t\sin\alpha}+\frac{a\omega^2\sin\alpha-g\cdot\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \quad (i)$$

Derivata soluției generale se scrie:

$$\dot{x}=\omega\sin\alpha\cdot\left(C_1e^{\omega t\sin\alpha}-C_2e^{-\omega t\sin\alpha}\right) \quad (j)$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru $t=0 \Rightarrow x(0)=0,$ şi $\dot{x}(0)=0$.

Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{g\cos\alpha-a\omega^2\sin\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \\ C_1-C_2=0 \end{cases} \quad (k)$$

Dacă se notează: $\dfrac{g\cos\alpha-a\omega^2\sin\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}=x_0$ (l)

se obține: $C_1=C_2=\dfrac{x_0}{2}$, deci ecuația mişcării se scrie: (m)

$$\begin{aligned} x&=\frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t\sin\alpha}+e^{-\omega t\sin\alpha t}-2\right)=x_0\cdot\left[ch(\omega t\sin\alpha)-1\right] \\ v=\dot{x}&=\frac{x_0}{2}\omega\sin\alpha\left(e^{\omega t\sin\alpha}-e^{-\omega t\sin\alpha}\right)=x_0\omega\sin\alpha\cdot sh(\omega t\sin\alpha) \end{aligned} \quad (n)$$

Se poate exprima legea de mişcare şi sub forma relației între viteză şi deplasare ținând seama de relația matematică: $ch^2x-sh^2x=1$.

Relațiile (n) se mai scriu astfel:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0}+1&=ch(\omega t\sin\alpha) \\ \frac{v}{x_0\omega\sin\alpha}&=sh(\omega t\sin\alpha) \end{aligned} \quad (o)$$

Legea de mişcare sub forma relației între viteză şi deplasare este deci:

$$\left(\frac{x}{x_0}+1\right)^2-\left(\frac{v}{x_0\omega\sin\alpha}\right)^2=1 \quad (p)$$

2. Înlocuind soluțiile (n) în a doua şi a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile N_1 şi N_2 care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy şi Oz:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg\sin\alpha + m\omega^2(a + \sin\alpha x_0[ch(\omega t\sin\alpha) - 1])\cos\alpha \\ N_2 &= 2m\omega\dot{x}\sin\alpha = 2m\omega^2\sin^2\alpha\, x_0 sh(\omega t\sin\alpha) \end{aligned} \qquad (q)$$

Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, forța totală de presiune N pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \qquad (r)$$

4. Condiția de repaus relativ este dată de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad si \quad v_r = \dot{x} = 0, \qquad (s)$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$\begin{cases} 0 = \omega^2(a + x\sin\alpha)\sin\alpha - g\cos\alpha \\ N_2 = 0 \\ N_1 = mg\sin\alpha + m\omega^2 a\cos\alpha \end{cases} \qquad (t)$$

Din prima ecuație rezultă poziția de repaus relativ a punctului față de tub:

$$x_R = \frac{g\cos\alpha - a\omega^2\sin\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \qquad (u)$$

repaus relativ care se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$g\cos\alpha - a\omega^2\sin\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg\alpha < \frac{g}{a\omega^2} \quad sau \quad \omega^2 < \frac{g}{a}ctg\alpha \qquad (v)$$

12.2. ***Se consideră*** *cadrul OABC din figura 12.2.a format dintr-un tub OA înclinat cu unghiul* α *față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se roteşte în jurul axei verticale BC cu viteza unghiulară* ω=constant. *În acelaşi timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material* M *(o bilă) de masă* m*, care este prins prin intremediul unui arc de constantă elastică* **c** *de punctul fix O; punctul material porneşte din* D *(*OD=l_0*=lungimea arcului nedeformat) fără viteză inițială. Se mai cunosc lungimile:* CO =a; CB=h.

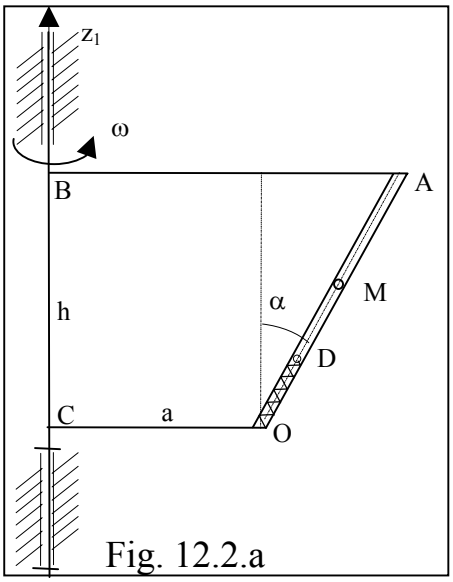


Fig. 12.2.a

Se cere:

1. să se deducă ecuațiile mişcării relative a punctului M în interiorul tubului şi soluția ecuației diferențiale respective.

2. să se determine forța de presiune pe care o exercită punctul M de masă m asupra pereților tubului.

3. Să se determine distanța OM pentru poziția de repaus relativ al punctului M față de tub

Rezolvare:

Față deproblema 12.1, în acest caz mai apare o forță ce acționează asupra punctului material (fig. 12.2.c) şi anume forța elastică a arcului având mărimea: $F_e = c(x - \ell_0)$, unde x este distanța de la punctul M la punctul O.

Se aleg cele două sisteme de axe ca în fig. 12.2.a: *triedrul fix* $O_1x_1y_1z_1$ şi *triedrul mobil Oxyz* cu originea în punctul O astfel încât planul cadrului A'ABB' să coincidă cu planul Oxz .

Vectorii $\bar{r}, \bar{r}_o, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ se exprimă prin proiecțiile lor pe axele triedrului mobil Oxzy, astfel (fig. 12.2.b):

$$\begin{aligned} &\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \qquad \bar{r}_0 = \overline{CO} = a\sin\alpha\bar{i} - a\cos\alpha\bar{k} \\ &\bar{\omega} = \omega\cos\alpha\cdot\bar{i} + \omega\sin\alpha\cdot\bar{k}; \qquad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Expresiile analitice ale vitezei relative şi de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial\bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{\omega}\times\bar{r}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times a(\sin\alpha\cdot\bar{i} - \cos\alpha\cdot\bar{k}) + \\ + \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(x\cdot\bar{i}) = \omega(a + x\sin\alpha)\bar{j} \end{aligned} \tag{c}$$

Expresiile analitice ale acceleraților relativă, de transport şi Coriolis în triedrul mobil Oxzy (fig. 12.1.b) sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\begin{aligned} &\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(\omega a\cdot\bar{j}) + \\ &+ \omega(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{k})\times(x\sin\alpha\bar{j}) \Rightarrow \bar{a}_t = \omega^2(x + a\sin\alpha)(\cos\alpha\cdot\bar{k} - \sin\alpha\cdot\bar{i}) \\ &\bar{a}_C = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = 2(\omega\cos\alpha\cdot\bar{i} + \omega\sin\alpha\cdot\bar{k})\times(\dot{x}\bar{i}) = 2\omega\dot{x}\sin\alpha\cdot\bar{j} \end{aligned} \tag{d}$$

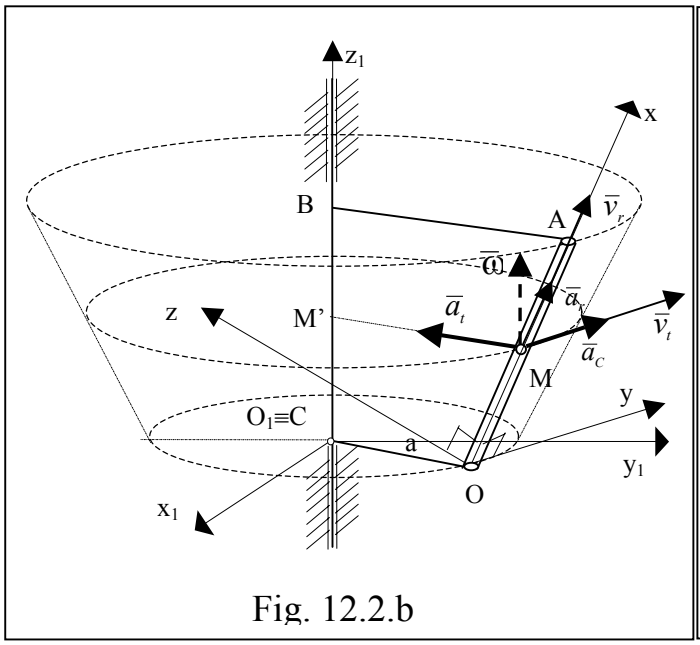


Fig. 12.2.b

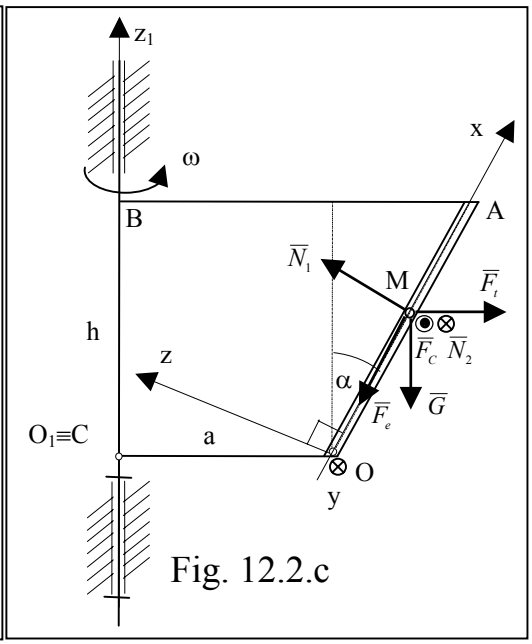


Fig. 12.2.c

Ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material este:

$$m\bar{a}_r=\bar{F}+\bar{F}_t+\bar{F}_C, \tag{e}$$

unde $\bar{F}$ reprezintă rezultanta forțelor efectiv aplicate și de legătură, $\bar{F}_t$ forța complementară de transport și $\bar{F}_C$ forța complementară Coriolis. Conform fig. 12.1.c expresiile analitice ale acestor forțe în proiecții pe axele sistemului mobil Oxzy, sunt:

$$\begin{aligned}
&\bar{F}=m\bar{g}+\bar{F}_e+\bar{N}_1+\bar{N}_2=-mg\cos\alpha\cdot\bar{i}-mg\sin\alpha\cdot\bar{k}-c(x-\ell_0)\bar{i}+N_1\bar{k}+N_2\bar{j}\\
&\bar{F}_t=-m\bar{a}_t=m\omega^2(a+x\sin\alpha)(\sin\alpha\bar{i}-\cos\alpha\cdot\bar{k})\\
&\bar{F}_C=-m\bar{a}_c=-2m\omega\,\dot{x}\,\sin\alpha\cdot\bar{j}
\end{aligned} \tag{f}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative (e) se scrie astfel:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\bar{i}=&\left[-mg\cos\alpha+m\omega^2x\sin^2\alpha-c(x-\ell_0)\right]\bar{i}+(N_2-2m\omega\,\dot{x}\sin\alpha)\bar{j}+\\
&+(N_1-mg\sin\alpha-m\omega^2x\sin\alpha\cos\alpha)\bar{k}
\end{aligned} \tag{f}$$

sau în proiecții pe axe, sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases}
m\ddot{x}=m\omega^2(a+x\sin\alpha)\sin\alpha-mg\cos\alpha-c(x-\ell_0)\\
0=N_2-2m\omega\dot{x}\sin\alpha\\
0=N_1-mg\sin\alpha-m\omega^2(a+x\sin\alpha)\cos\alpha
\end{cases} \tag{g}$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x}-\left(\omega^2\sin^2\alpha-\frac{c}{m}\right)x=-g\cos\alpha+\frac{c\ell_0}{m}+a\,\omega^2\sin\alpha \tag{h}$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene (x_{om}) și o soluție particulară a ecuației neomogene (x_p):

$$x=x_{om}+x_p \tag{i}$$

Se consideră cele două ipoteze posibile:

a) Dacă: $\omega^2\sin^2\alpha-\frac{c}{m}<0$, *notam* $\omega^2\sin^2\alpha-\frac{c}{m}=-\lambda^2$ (j)

Soluția generală a ecuației omogene (x_{om}) se scrie sub forma:

$$x_{om}=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}, \tag{k}$$

unde r_1 *şi* r_2 sun rădăcinile ecuației caracteristice:

$r^2+\lambda^2=0$, adică $r_{1,2}=\pm i\lambda$, deci (k) devine:

$$x_{om}=C_1e^{i\lambda t}+C_2e^{-i\lambda t}=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t$$

Soluția particulară a ecuației neomogene se găseşte de forma:

$$x_p=\frac{-g\cdot\cos\alpha+c\frac{\ell_0}{m}+\omega^2a\sin\alpha}{\frac{c}{m}-\omega^2\sin^2\alpha} \tag{l}$$

Deci soluția generală se scrie:

$$x = A_1 \cos\lambda t + A_2 \sin\lambda t + \frac{-g\cdot\cos\alpha + c\frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin\alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha} \qquad \text{(m)}$$

iar derivata ei se scrie:

$$\dot{x} = -A_1\lambda \sin\lambda t + A_2\lambda \cos\lambda t \qquad \text{(n)}$$

unde A_1 şi A_2 sunt constante de integrare care se determină din condiţiile iniţiale ale problemei: pentru $t=0 \Rightarrow x(0) = l_0$, şi $\dot{x}(0) = 0$.

Se obţin astfel pentru A_1 şi A_2 valorile:

$$\begin{cases} A_1 = \ell_0 - \dfrac{-g\cdot\cos\alpha + c\dfrac{\ell_0}{m} + \omega^2 a\sin\alpha}{\dfrac{c}{m} - \omega^2\sin^2\alpha} = x_0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(o)}$$

deci ecuaţia (m) a mişcării se scrie:

$$\begin{aligned} x &= \ell_0 + x_0(\cos\lambda t - 1) \\ v &= \dot{x} = -\lambda x_0 \sin\lambda t \end{aligned} \qquad \text{(p)}$$

Înlocuind soluţiile (n) în a doua şi a treia ecuaţie (f) rezultă reacţiunile N_1 şi N_2 care sunt egale în modul cu forţele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereţilor tubului după Oy şi Oz. Ţinând seama că cele două reacţiuni sunt perpendiculare, forţa totală de presiune N pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

b) Dacă $\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{c}{m} > 0$, *notam* $\omega^2\sin^2\alpha - \frac{c}{m} = \beta^2$ (q)

Soluţia generală a ecuaţiei omogene (x_{om}) se scrie sub forma:

$$x_{om} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \qquad \text{(r)}$$

unde r_1 şi r_2 sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$$r^2 - \beta^2 = 0,$$

adică $r_{1,2} = \pm\beta$, deci (r) devine:

$$x_{om} = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se găseşte de forma:

$$x_p = \frac{-g\cdot\cos\alpha + c\frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a\sin\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha - \frac{c}{m}} \qquad \text{(s)}$$

Deci soluţia generală se scrie:

$$x = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t} + \frac{-g \cdot cos\alpha + c\frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin\alpha}{\omega^2 sin^2\alpha - \frac{c}{m}} \qquad (t)$$

iar derivata ei se scrie:

$$\dot{x} = C_1 \beta e^{\beta t} - C_2 \beta e^{-\beta t} \qquad (u)$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare care se determină din condiţiile iniţiale ale problemei: pentru $t=0 \Rightarrow x(0) = l_0$, şi $\dot{x}(0) = 0$.

Se obţine astfel următorul sistem de două ecuaţii cu două necunoscute C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{-g \cdot cos\alpha + c\dfrac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin\alpha}{\omega^2 sin^2\alpha - \dfrac{c}{m}} = \ell_0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \qquad (v)$$

Dacă se notează: $\ell_0 - \dfrac{-g \cdot cos\alpha + c\dfrac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin\alpha}{\omega^2 sin^2\alpha - \dfrac{c}{m}} = x_0$ (w)

se obţine: $C_1 = C_2 = \dfrac{x_0}{2}$, deci ecuaţia mişcării se scrie: (x)

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) + \ell_0 - x_0 = x_0(ch\beta t - 1) + \ell_0$$
$$v = \dot{x} = x_0 \beta \cdot sh\beta t \qquad (y)$$

Se poate exprima legea de mişcare şi sub forma relaţiei între viteză şi deplasare ţinând seama de relaţia matematică: $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

Relaţiile (y) se mai scriu astfel:

$$\frac{x - \ell_0}{x_0} + 1 = ch\beta t; \qquad \frac{v}{x_0 \beta} = sh\beta t \qquad (z)$$

Legea de mişcare sub forma relaţiei între viteză şi deplasare este deci:

$$\left(\frac{x - \ell_0}{x_0} + 1\right)^2 - \left(\frac{v}{x_0 \beta}\right)^2 = 1 \qquad (aa)$$

2. Înlocuind soluţiile (n) în a doua şi a treia ecuaţie (y) rezultă reacţiunile N_1 şi N_2 care sunt egale în modul cu forţele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereţilor tubului după Oy şi Oz: Ţinând seama că cele două reacţiuni sunt perpendiculare, forţa totală de presiune N pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \qquad (r)$$

3. Condițiile de repaus relativ sunt date de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad si \quad v_r = \dot{x} = 0, \tag{ab}$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$x_R = (OM)_R = \frac{-mg\cos\alpha + c\ell_0 + m\,\omega^2 a\sin\alpha}{-m\omega^2\sin^2\alpha + c}$$

$$N_2 = 0 \tag{ac}$$

$$N_1 = mg\sin\alpha + m\omega^2\left(a + x_R\sin\alpha\right)$$

Repausul relativ se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{-mg\cos\alpha + c\ell_0 + m\,\omega^2 a\sin\alpha}{-m\omega^2\sin^2\alpha + c} > \ell_0 \tag{ad}$$

12.3. ***Se consideră*** *cadrul OABC din figura 12.3.a format dintr-un tub OA înclinat cu unghiul* α *față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește în jurul axei verticale BC cu viteza unghiulară* ω=constant. *În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material* M *(o bilă) de masă* m*, pornind din punctul* O *fără viteză inițială. Tubul este înclinat față de verticală cu unghiul* α*. Se mai cunosc lungimile:* CO =a; CB=h.

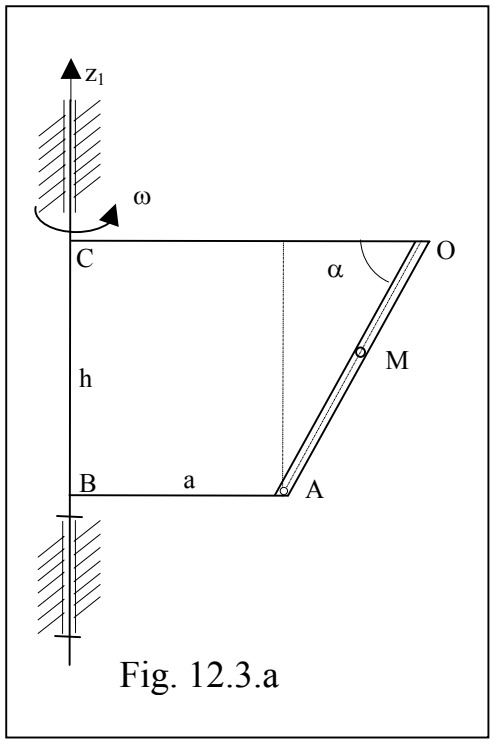


Fig. 12.3.a

Se cere:

1. *să se deducă ecuațiile scalare ale mișcării relative a punctului M în interiorul tubului și legea de mișcare.*
2. *să se determine forța de presiune pe care o exercită punctul M de masă m asupra pereților tubului.*
3. *Să se determine poziția punctului M pentru poziția de repaus relativ față de tub.*

Rezolvare:

Se aleg cele două sisteme de axe ca în fig. 12.3.a: *sistemul de axe (triedrul, reperul) fix* $O_1x_1y_1z_1$ și *sistemul de axe mobil Oxyz* cu originea în punctul O astfel încât planul cadrului A'ABB' să coincidă cu planul Oxz și Oy dat de regula șurubului drept.

Pentru studiul mișcării se pleacă de la ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{F}_t + \overline{F}_C, \tag{a}$$

unde conform fig. 12.3.c se poate scrie:

- $\overline{F}=m\overline{g}+\overline{N}_1+\overline{N}_2 = mg\,sin\alpha\cdot\bar{i}+mgcos\alpha\cdot\bar{k}-N_1\bar{k}-N_2\bar{j}$ (b)

rezultanta forțelor efectiv aplicate şi de legătură,

- $\overline{F}_t=-m\overline{a}_t$ forța complementară de transport (c)
- $\overline{F}_C=-m\overline{a}_C$ forța complementară Coriolis. (d)

Accelerațiile de transport şi Coriolis față de triedrul mobil Oxzy (fig. 12.3.b) sunt:

$$\begin{aligned}&\overline{a}_t=\overline{a}_t^{\,v}=\omega^2(a-x\cos\alpha)\left(\cos\alpha\cdot\bar{i}-\sin\alpha\cdot\bar{k}\right)\\&\overline{a}_C=2\overline{\omega}\times\overline{v}_r=2(-\omega\sin\alpha\cdot\bar{i}-\omega\cos\alpha\cdot\bar{k})\times(\dot{x}\bar{i})=-2\omega\dot{x}\cos\alpha\cdot\bar{j}\end{aligned}\qquad(d)$$

Rezultă expresiile analitice ale forțelor complementare

$$\begin{aligned}&\overline{F}_t=-m\overline{a}_t=m\omega^2(a-x\cos\alpha)\left(-\cos\alpha\cdot\bar{i}+\sin\alpha\cdot\bar{k}\right)\\&\overline{F}_C=-m\overline{a}_C=2m\omega\dot{x}\cos\alpha\cdot\bar{j}\end{aligned}\qquad(e)$$

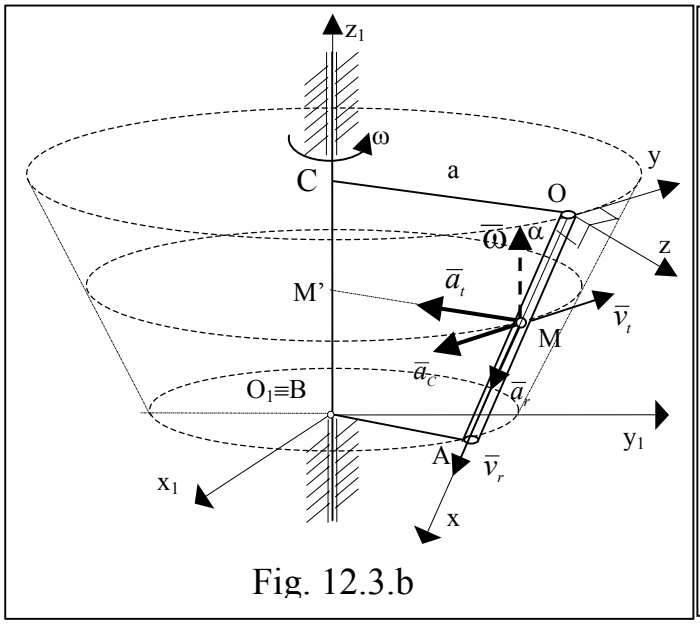


Fig. 12.3.b

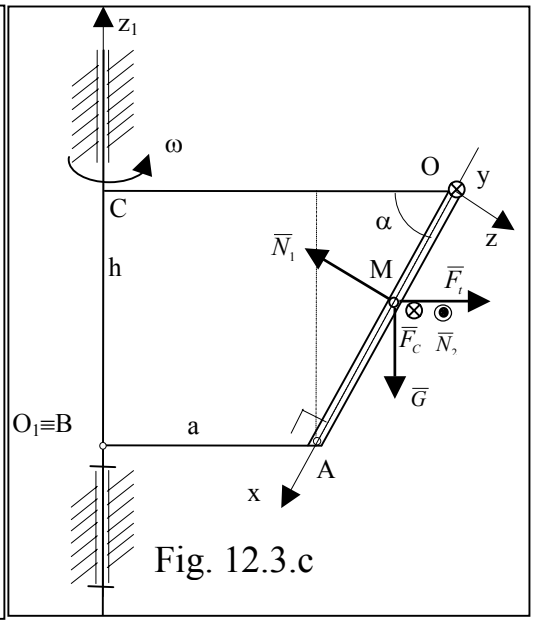


Fig. 12.3.c

Ecuația fundamentală a dinamicii mişcării relative (e) se scrie astfel:

$$\begin{aligned}&m\ddot{x}\bar{i}=mg\,sin\alpha\cdot\bar{i}+mgcos\alpha\cdot\bar{k}-N_1\bar{k}-N_2\bar{j}+\\&+m\omega^2(a-x\cos\alpha)\left(-\cos\alpha\cdot\bar{i}+\sin\alpha\cdot\bar{k}\right)+2m\omega\dot{x}\cos\alpha\cdot\bar{j}\end{aligned}\qquad(f)$$

sau în proiecții pe axe, sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{aligned}&m\ddot{x}=mg\,sin\alpha-m\omega^2(a-x\cos\alpha)\cos\alpha\\&0=-N_2+2m\omega\dot{x}\cos\alpha\\&0=-N_1+mg\cos\alpha+m\omega^2(a-x\cos\alpha)\sin\alpha\end{aligned}\qquad(g)$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x}-\omega^2\cos^2\alpha\cdot x=g\,sin\alpha-a\,\omega^2\cos\alpha\qquad(h)$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene (x_{om}) şi o soluție particulară a ecuației neomogene (x_p):

$$x = x_{om} + x_p = C_1 e^{\omega t \cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t \cos\alpha} - \frac{g \cdot \sin\alpha - a\,\omega^2 \cos\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha} \tag{i}$$

Derivata soluției generale se scrie:

$$\dot{x} = \omega \cos\alpha \left(C_1 e^{\omega t \cos\alpha} - C_2 e^{-\omega t \cos\alpha} \right) \tag{j}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru $t=0 \Rightarrow x(0)=0$, şi $\dot{x}(0)=0$.

Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{g \sin\alpha - a\,\omega^2 \cos\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha} \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \tag{k}$$

Dacă se notează: $$\frac{g \sin\alpha - a\,\omega^2 \cos\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha} = x_0 \tag{l}$$

se obține: $C_1 = C_2 = \dfrac{x_0}{2}$, deci ecuația mişcării se scrie: (m)

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t \cos\alpha} + e^{-\omega t \cos\alpha t} - 2 \right) = x_0 \cdot \left[ch(\omega t \cos\alpha) - 1 \right]$$

$$v = \dot{x} = \frac{x_0}{2}\omega \cos\alpha \left(e^{\omega t \cos\alpha} - e^{-\omega t \cos\alpha} \right) = x_0 \omega \cos\alpha \cdot sh(\omega t \cos\alpha) \tag{n}$$

Se poate exprima legea de mişcare şi sub forma unei ecuații viteză - deplasare ținând seama de relația matematică: $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

Relațiile (n) se mai scriu astfel:

$$\frac{x}{x_0} + 1 = ch(\omega t \cos\alpha)$$

$$\frac{v}{x_0 \omega \cos\alpha} = sh(\omega t \sin\alpha) \tag{o}$$

Legea de mişcare sub forma relației între viteză şi deplasare este deci:

$$\left(\frac{x}{x_0} + 1 \right)^2 - \left(\frac{v}{x_0 \omega \cos\alpha} \right)^2 = 1 \tag{p}$$

2. Înlocuind soluțiile (n) în a doua şi a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile N_1 şi N_2 care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy şi Oz:

$$N_1 = mg\cos\alpha + m\omega^2 \left(a - \cos\alpha x_0 \left[ch(\omega t \cos\alpha) - 1 \right] \right) \sin\alpha$$

$$N_2 = 2m\omega\dot{x}\cos\alpha = 2m\omega^2 \cos^2\alpha\, x_0 sh(\omega t \cos\alpha) \tag{q}$$

Forța totală de presiune N pe care o exercită punctul M asupra tubului este: $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ (r)

4. Condiția de repaus relativ este dată de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad si \quad v_r = \dot{x} = 0, \quad x = x_R \tag{s}$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$\begin{aligned} 0 &= mg\sin\alpha - m\omega^2(a - x_R\cos\alpha)\cos\alpha \\ 0 &= -N_2 \\ 0 &= -N_1 + mg\cos\alpha + m\omega^2(a - x_R\cos\alpha)\sin\alpha \end{aligned} \tag{t}$$

Din prima ecuație rezultă poziția de repaus relativ a punctului față de tub:

$$x_R = \frac{-g\sin\alpha + a\omega^2\cos\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} \tag{u}$$

repaus relativ care se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$-g\sin\alpha + a\omega^2\cos\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg\alpha < \frac{a\omega^2}{g} \quad sau \quad \omega^2 > \frac{g}{a}tg\alpha \tag{v}$$

12.4. ***Se consideră*** *cadrul ABB'A' format dintr-un tub situat în plan vertical de forma semicirculară ca în figura 12.4, care se roteşte cu viteza unghiulară constantă* ω*. În acelaşi timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material de masă m, pornind din punctul A cu viteză inițială. Se mai cunosc lungimile: AA' =a; A'B'=h.*

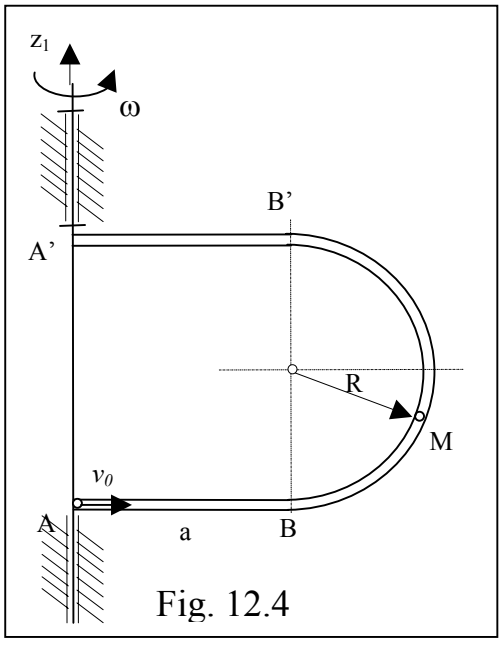


Fig. 12.4

Se cere:

1. *să se deducă ecuațiile mişcării relative a punctului în interiorul tubului pe cele două porțiuni AB şi BB'*
2. *să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă m asupra peretelui tubului pe cele două porțiuni .*

Rezolvare:

a. Mişcarea pe AB

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.4.a: sistemul de axe (triedrul, reperul) fix $O_1x_1y_1z_1$ şi sistemul de axe mobil $Oxyz$ cu originea în acelaşi punct de pe axa de rotație astfel încât planul cadrului ABB'A' să coincidă cu planul Oxz şi Oy dat de regula şurubului drept.

Se exprimă vectorii $\bar{r}, \bar{r}_o, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ prin proiecțiile lor față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \qquad \bar{r}_0 = 0$$
$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}; \qquad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \tag{a}$$

Viteza relativă şi de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = (\omega \cdot \bar{k}) \times (x \cdot \bar{i}) = \omega \cdot x\, \bar{j}$$

Accelerațiile relativă, de transport şi Coriolis se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\omega \cdot \bar{k}) \times (\omega x \cdot \bar{j}) = -\omega^2 x \cdot \bar{i} \tag{c}$$

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = (2\omega \cdot \bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega \dot{x} \cdot \bar{j}$$

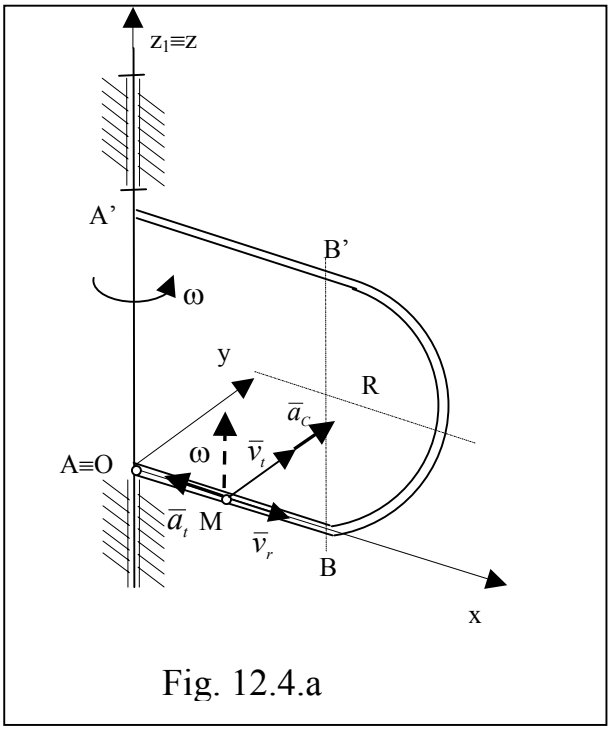


Fig. 12.4.a

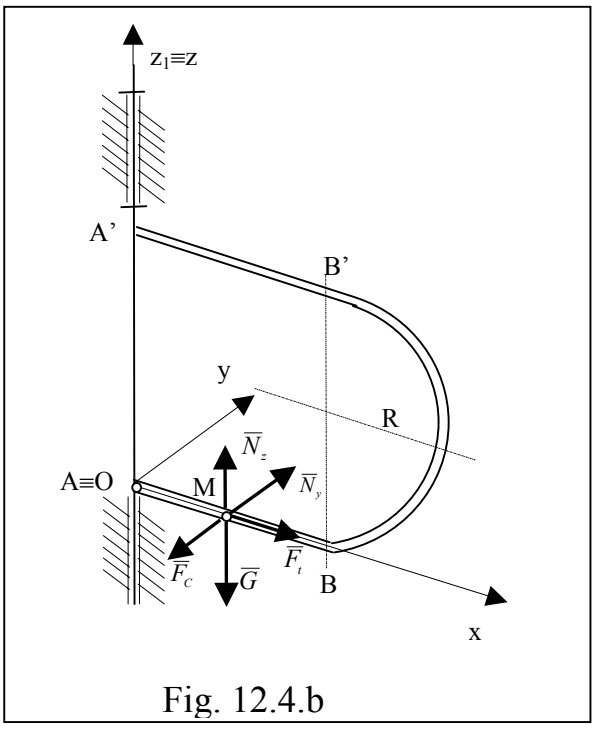


Fig. 12.4.b

Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate şi de legătură) şi a forțelor complementare (de transport şi Coriolis) conform fig. 12.3.b sunt

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_z + \bar{N}_y = -mg \cdot \bar{k} + N_z\bar{k} + N_y\bar{j}$$
$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = m\omega^2 x \cdot \bar{i} \tag{d}$$
$$\bar{F}_C = -m\bar{a}_c = -2m\omega\, \dot{x} \cdot \bar{j}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii mişcării relative a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_C, \quad \text{se scrie analitic astfel:} \tag{e}$$
$$m\ddot{x}\bar{i} = m\omega^2 x \cdot \bar{i} + (N_y - 2m\omega\, \dot{x})\bar{j} + (N_z - mg)\bar{k} \tag{f}$$

sau în proiecţii pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2 x \\ 0=N_y-2m\omega\dot{x} \\ 0=N_z-mg \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuaţie (g) se mai scrie: $\ddot{x}-\omega^2\cdot x=0$ (h)

şi are soluţia de forma: $x=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}$, (i)

respectiv derivata: $\dot{x}=\omega\left(C_1e^{\omega t}-C_2e^{-\omega t}\right)$ (j)

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare care se determină din condiţiile iniţiale ale problemei: $x(0)=0$, şi $\dot{x}(0)=v_0$. Se obţine astfel următorul sistem de două ecuaţii cu două necunoscute C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2=\dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \quad (k)$$

se obţine: $C_1=-C_2=\dfrac{v_0}{2\omega}$, deci ecuaţia mişcării se scrie:

$$x=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})=\frac{v_0}{\omega}\cdot sh(\omega t) \quad (l)$$

$$\dot{x}=v_0\,ch(\omega t)$$

Se poate exprima legea de mişcare şi sub forma viteză funcţie de spaţiu ţinând seama de relaţia matematică evidentă: $ch^2x-sh^2x=1$:

$$\left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right)^2-\left(\frac{x\omega}{v_0}\right)^2=1 \quad (m)$$

sau sub forma:

$$v(x)=\dot{x}=v_0\sqrt{\left(\frac{x\omega}{v_0}\right)^2+1} \quad (n)$$

În punctul B viteza va fi: $v_B=v_0\sqrt{\left(\dfrac{a\omega}{v_0}\right)^2+1}$ (o)

Din ultimele două ecuaţii (g) rezultă reacţiunile N_y şi N_z:

$$N_y=2m\omega\dot{x}=2m\omega v0\sqrt{\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)^2+1;} \qquad N_z=mg \quad (p)$$

b. Mişcarea pe BB'

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.4.c: sistemul de axe (triedrul, reperul) fix $O_1x_1y_1z_1$ şi sistemul de axe mobil $Oxyz$ cu originea în acelaşi punct de pe axa de rotaţie astfel încât planul cadrului ABB'A' să coincidă cu planul Oxz şi Oy dat de regula şurubului drept.

Se exprimă vectorii $\bar{r}, \bar{r}_o, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ prin proiecțiile lor față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{r} = \overline{OM} = (a + R\sin\theta)\bar{i} + R(1-\cos\theta)\bar{k}; \qquad \bar{r}_0 = 0$$
$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}; \qquad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \tag{q}$$

Viteza relativă şi de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = R\dot{\theta}\cos\theta\bar{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\bar{k} = R\dot{\theta}\bar{\tau} \tag{r}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = (\omega\cdot\bar{k})\times\left((a + R\sin\theta)\bar{i} + R(1-\cos\theta)\bar{k}\right) = \omega\cdot(a + R\sin\theta)\,\bar{j}$$

Se observă că viteza de transport este în acelaşi sens cu axa Oy, fiind proporțională cu distanța până la axa de rotație: $d = MM' = a + R\sin\theta$.

Accelerațiile relativă, de transport şi Coriolis se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\bar{i} + \left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\cdot\bar{k}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) = (\omega\cdot\bar{k})\times\left[\omega\cdot(a + R\sin\theta)\,\bar{j}\right] = -\omega^2(a + R\sin\theta)\cdot\bar{i} \tag{s}$$

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = \left(2\omega\cdot\bar{k}\right)\times\left(R\dot{\theta}\cos\theta\bar{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\bar{k}\right) = 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta\cdot\bar{j}$$

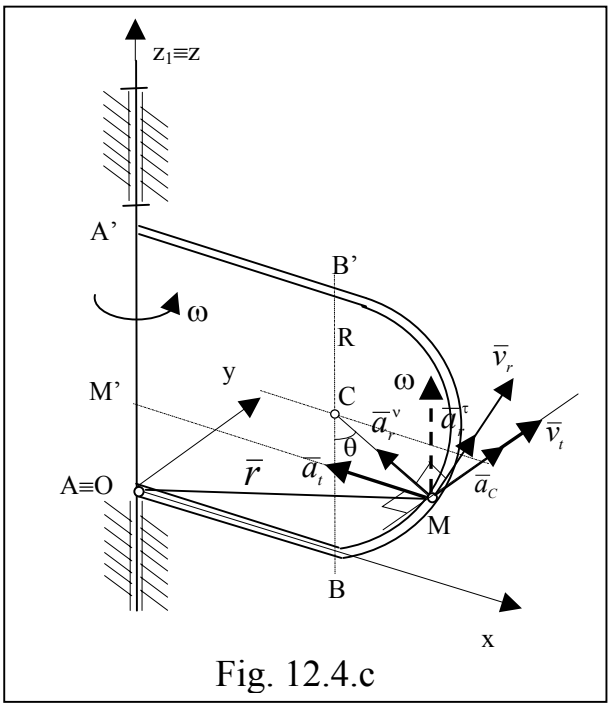


Fig. 12.4.c

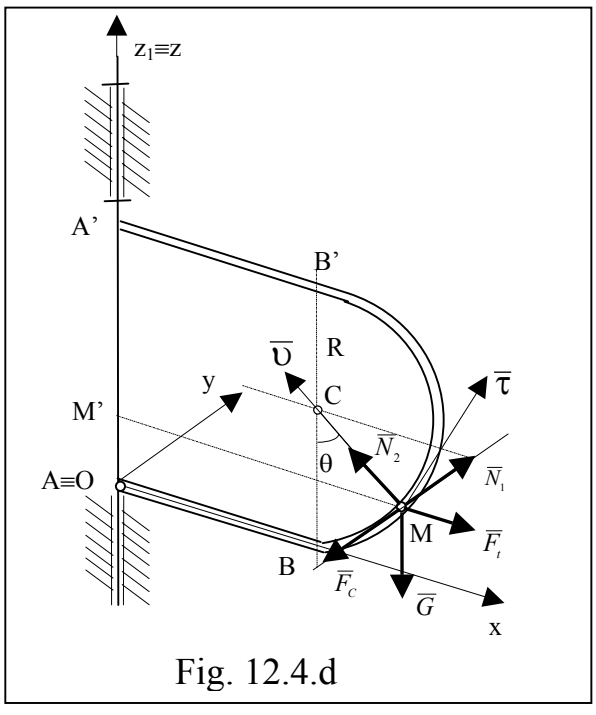


Fig. 12.4.d

Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate şi de legătură) şi a forțelor complementare (de transport şi Coriolis) conform fig. 12.4.d sunt

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg\cdot\bar{k} - N_1\sin\theta\cdot\bar{i} + N_1\cos\theta\cdot\bar{k} + N_2\bar{j}$$
$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = m\omega^2(a + R\sin\theta)\cdot\bar{i} \tag{t}$$
$$\bar{F}_C = -m\bar{a}_C = -2m\omega R\dot{\theta}\cos\theta\cdot\bar{j}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_C\,, \tag{u}$$

se scrie analitic astfel:

$$\begin{aligned} &m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\bar{i} + m\left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\cdot\bar{k} = -mg\cdot\bar{k} - N_1\sin\theta\cdot\bar{i} + \\ &+N_1\cos\theta\bar{k} + N_2\bar{j} + m\omega^2(a + R\sin\theta)\cdot\bar{i} - 2m\omega R\dot{\theta}\cos\theta\cdot\bar{j} \end{aligned} \tag{w}$$

sau în proiecții pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases} m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -N_1\sin\theta + m\omega^2(a + R\sin\theta) \\ 0 = N_2 - 2m\omega R\dot{\theta}\cos\theta \\ m\left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = -mg + N_1\cos\theta \end{cases} \tag{x}$$

Dacă se multiplică prima ecuație (x) cu $\cos\theta$ și a treia cu $\sin\theta$ și se adună membru cu membru se obține ecuația diferențială:

$$\begin{aligned} &mR\ddot{\theta}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = m\omega^2(a + R\sin\theta)\cos\theta - mg\sin\theta, \qquad sau \\ &R\ddot{\theta} = \omega^2(a + R\sin\theta)\cos\theta - g\sin\theta \end{aligned} \tag{y}$$

Multiplicând ecuația (y) cu: $d\theta = \dot{\theta}dt$ și integrând se obține o primă formă integrală a soluției:

$$\begin{aligned} &R\ddot{\theta}\cdot\dot{\theta}dt = \omega^2(a + R\sin\theta)\cos\theta\cdot d\theta - g\sin\theta d\theta \\ &\frac{R\dot{\theta}^2}{2} = \omega^2 a\sin\theta - \frac{1}{4}\omega^2 R\cos 2\theta + g\cos\theta + C \end{aligned} \tag{z}$$

Constanta de integrare se obține din condițiile inițiale:

$$\theta = 0 \Rightarrow v_B = R\dot{\theta} = v_0\sqrt{\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)^2 + 1} \tag{aa}$$

Se obține astfel legea de mișcare sub forma:

$$v(\theta) = R\dot{\theta} = \sqrt{v_B^2 + 2R\omega^2 a\sin\theta + \omega^2 R^2\sin^2\theta - 2Rg(1 - \cos\theta)} \tag{ab}$$

Viteza în punctul B' se obține din relația (ab) în care $\theta=180^0$:

$$v_{B'} = \sqrt{v_B^2 - 4Rg} \tag{ac}$$

Pentru ca punctul să ajungă în B' trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{aligned} &v_B^2 \geq 4Rg \quad sau \quad (a\omega)^2 + v_0^2 \geq 4Rg \\ &sau: v_0 \geq \sqrt{4Rg - (a\omega)^2} \end{aligned} \tag{ad}$$

12.5. ***Se consideră*** *cadrul A'ABB' din figura 12.5 format dintr-un tub AB înclinat cu unghiul α față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește cu viteza unghiulară constantă* $\boldsymbol{\omega}$*. În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material de masă m, pornind din punctul A fără viteză inițială. Se mai cunosc lungimile: AA' =a; A'B'=h.*

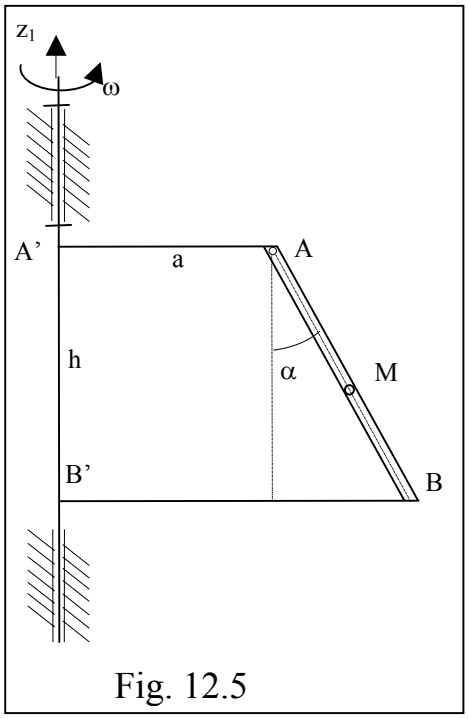


Fig. 12.5

Se cere:

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului în interiorul tubului

2. să se determine viteza absolută în momentul părăsirii tubului (în punctul B);

3. să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă m asupra peretelui tubului.

Rezolvare:

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.5.a: *sistemul de axe (triedrul, reperul) fix* $O_1x_1y_1z_1$ şi *sistemul de axe mobil Oxyz* cu originea în același punct de pe axa de rotație astfel încât planul cadrului A'ABB' să coincidă cu planul Oxz şi Oy dat de regula şurubului drept.

Se exprimă vectorii $\bar{r}, \bar{r}_o, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ prin proiecțiile lor față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.5.a):

$$\begin{aligned} &\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \qquad \bar{r}_0 = 0 \\ &\bar{\omega} = -\omega cos\alpha \cdot \bar{i} + \omega sin\alpha \cdot \bar{k}; \qquad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Viteza relativă şi de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.5.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = (-\omega cos\alpha \cdot \bar{i} + \omega sin\alpha \cdot \bar{k}) \times \left(x \cdot \bar{i}\right) = \omega \cdot x \, sin\alpha \cdot \bar{j}$$

Accelerațiile relativă, de transport şi Coriolis se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.5.a):

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\begin{aligned} &\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) = (-\omega cos\alpha \cdot \bar{i} + \omega sin\alpha \cdot \bar{k}) \times (\omega x \, sin\alpha \cdot \bar{j}) \\ &\Rightarrow \bar{a}_t = -\omega^2 x sin^2\alpha \cdot \bar{i} - \omega^2 x sin\alpha cos\alpha \cdot \bar{k} \\ &\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2(-\omega cos\alpha \cdot \bar{i} + \omega sin\alpha \cdot \bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega \dot{x} sin\alpha \cdot \bar{j} \end{aligned} \tag{c}$$

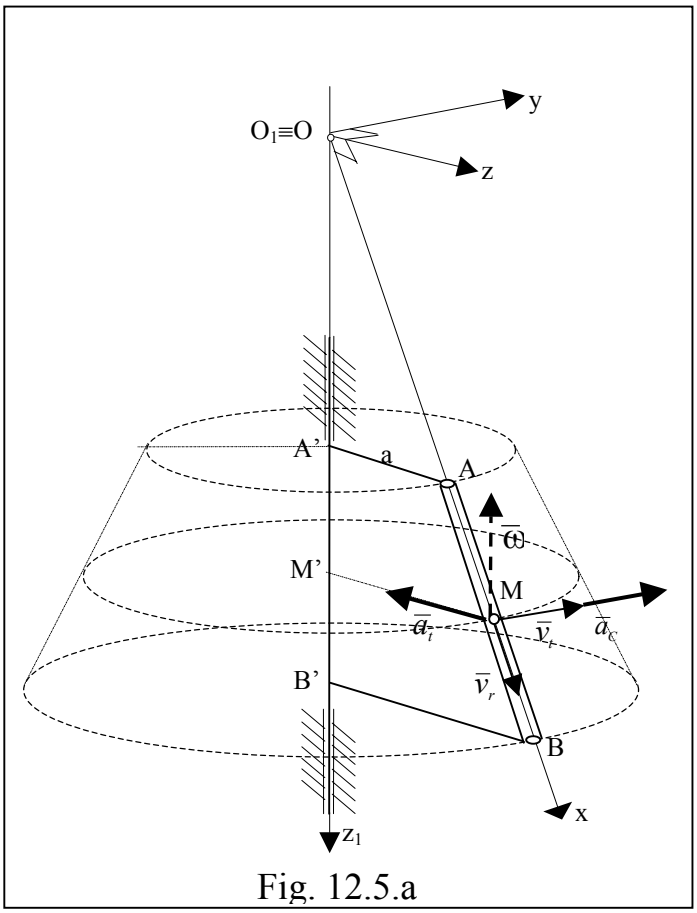


Fig. 12.5.a

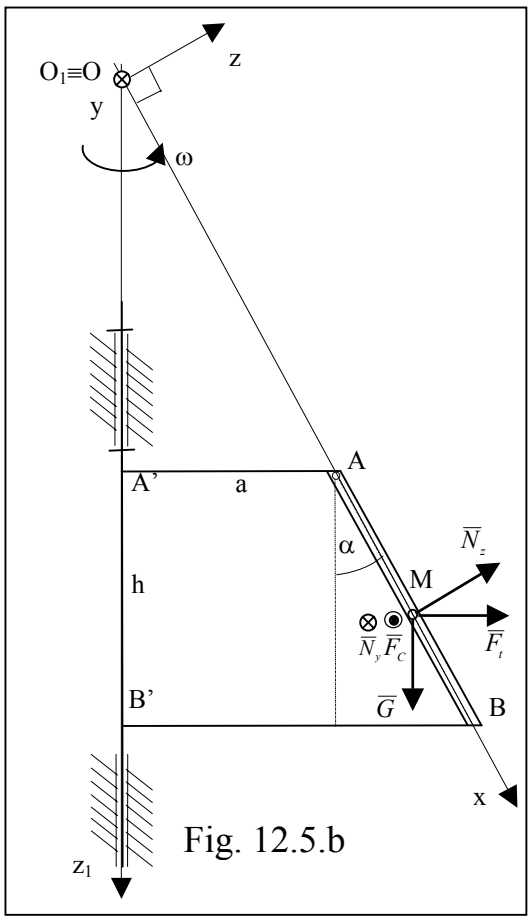


Fig. 12.5.b

Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate şi de legătură) şi a forțelor complementare (de transport şi Coriolis) conform fig. 12.5.b sunt

$$\begin{aligned}
&\overline{F}=m\overline{g}+\overline{N}_z+\overline{N}_y = mg\cos\alpha\cdot\bar{i}-mg\sin\alpha\cdot\bar{k}+N_z\bar{k}+N_y\bar{j}\\
&\overline{F}_t=-m\overline{a}_t = m\omega^2 x\sin^2\alpha\cdot\bar{i}+m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha\cdot\bar{k}\\
&\overline{F}_C=-m\overline{a}_c=-2m\omega\,\dot{x}\sin\alpha\cdot\bar{j}
\end{aligned} \tag{d}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii mişcării relative a punctului material:

$$m\overline{a}_r=\overline{F}+\overline{F}_t+\overline{F}_C, \quad \text{se scrie analitic astfel:} \tag{e}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\bar{i}=&(mg\cos\alpha+m\omega^2 x\sin^2\alpha)\bar{i}+(N_y-2m\omega\,\dot{x}\sin\alpha)\bar{j}+\\
&+(N_z-mg\sin\alpha+m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha)\bar{k}
\end{aligned} \tag{f}$$

sau în proiecții pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases}
m\ddot{x}=m\omega^2 x\sin^2\alpha+mg\cos\alpha\\
0=N_y-2m\omega\dot{x}\sin\alpha\\
0=N_z-mg\sin\alpha+m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha
\end{cases} \tag{g}$$

Prima ecuație (g) se mai scrie:

$$\ddot{x}-\omega^2\sin^2\alpha\cdot x=g\cos\alpha \tag{h}$$

şi are soluția de forma: $x=C_1 e^{\omega \sin\alpha t}+C_2 e^{-\omega \sin\alpha t}-\frac{g\cdot\cos\alpha}{\omega^2\cdot\sin^2\alpha}$, (i)

respectiv derivata: $\dot{x}=\omega\sin\alpha\cdot\left(C_1 e^{\omega \sin\alpha t}-C_2 e^{-\omega \sin\alpha t}\right)$ (j)

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: $x(0)=a/\sin\alpha$, şi $\dot{x}(0)=0$. Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{a}{\sin\alpha}+\dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \\ C_1-C_2=0 \end{cases} \quad \text{(k)}$$

Dacă se notează: $\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{g\cdot\cos\alpha}{\omega^2\cdot\sin^2\alpha}=x_0$ (l)

se obține: $C_1=C_2=\frac{x_0}{2}$, deci ecuația mişcării se scrie: (m)

$$x=\frac{x_0}{2}\left(e^{\omega \sin\alpha t}+e^{-\omega \sin\alpha t}\right)-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\quad x=x_0\cdot ch(\omega\sin\alpha\cdot t)-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \quad \text{(n)}$$
$$\dot{x}=x_0\omega\sin\alpha\cdot sh(\omega\sin\alpha\cdot t)$$

Se poate exprima legea de mişcare şi sub forma viteză funcție de spațiu ținând seama de relația matematică evidentă: $ch^2x-sh^2x=1$; relațiile (n) se scriu astfel:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{x_0}+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 x_0\sin^2\alpha}=ch(\omega\sin\alpha\cdot t) \\ &\frac{\dot{x}}{x_0\omega\sin\alpha}=sh(\omega\sin\alpha\cdot t) \end{aligned} \quad \text{(o)}$$

rezultă deci legea de mişcare sub forma:

$$\left(\frac{x}{x_0}+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 x_0\sin^2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\dot{x}}{x_0\omega\sin\alpha}\right)^2=1 \quad \text{(p)}$$

sau sub forma:

$$v(x)=\dot{x}=x_0\omega\sin\alpha\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 x_0\sin^2\alpha}\right)^2-1} \quad \text{(q)}$$

2. Viteza cu care punctul material părăseşte tubul se obține ținând seama că cele două viteze (relalivă şi de transport) sunt perpendiculare (conform relațiilor b):

$$v_B=\sqrt{v_{rB}^2+v_{tB}^2} \quad \text{(r)}$$

unde:

- viteza relativă: $v_{rB} = \dot{x}_B = x_0 \omega \sin\alpha \sqrt{\left(\frac{x_B}{x_0} + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 x_0 \sin^2\alpha}\right)^2 - 1}$ (s)

- viteza de transport: $v_{tB} = \omega \cdot x_B \sin\alpha$ (t)

unde : $x_B = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{h}{\cos\alpha}$ (u)

3. Din a doua şi a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile N_1 şi N_2 ale punctului material asupra peretelui tubului care sunt egale ca mărime cu reacțiunile N_z şi N_y ce acționează asupra punctului:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_y = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha \\ N_1 &= N_z = mg\sin\alpha - m\omega^2 x \sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \quad \text{(v)}$$

Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, reacțiunea totală N asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m\sin\alpha\sqrt{\left(g - \omega^2 x\cos\alpha\right)^2 + 4\omega^2\dot{x}^2} \quad \text{(w)}$$

PROBLEMĂ PROPUSĂ

12.6. ***Se consideră*** *cadrul A'ABB' din figura 12.6 format dintr-un tub AB înclinat cu unghiul α față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se roteşte cu viteza unghiulară constantă* ***ω****. În acelaşi timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material M de masă m, pornind din punctul O cu viteza inițială v_0. Se mai cunosc lungimile: AA' =a; A'B'=h.*

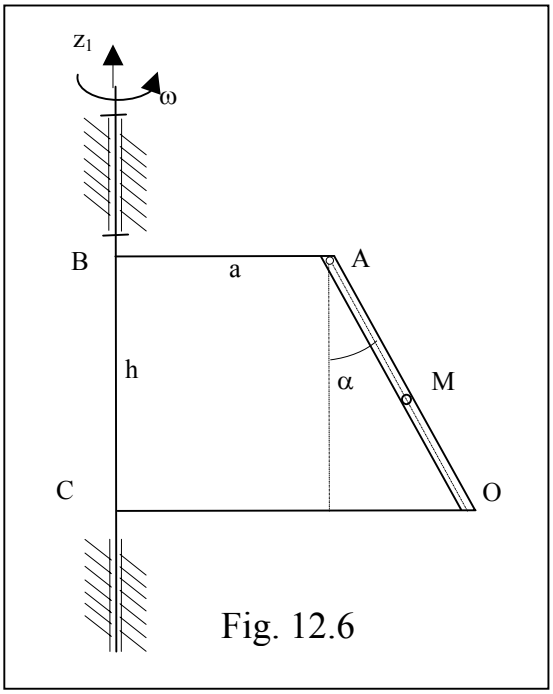


Fig. 12.6

Se cere:

1. să se deducă ecuațiile mişcării relative a punctului în interiorul tubului

2. să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă m asupra peretelui tubului.

3. să se determine poziția de repaus relativ şi forța pe care o exercită punctul material de masă m asupra peretelui tubului în acestă poziție

CAPITOLUL XIII
DINAMICA RIGIDULUI ŞI A SISTEMELOR DE RIGIDE

PROBLEME REZOLVATE

13.1. ***Se consideră*** *volantul din figura alăturată care se roteşte cu turaţia* $n_0[rot/min]$ *în jurul unei axe perpendiculare pe planul său (xOy), ce trece prin O. Volantul are raza R, greutatea G şi momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie (Oz)* J_0 *. Se frânează volantul cu ajutorul a doi saboţi apăsaţi fiecare cu forţa radială P (fig. 13.1). Coeficientul de frecare, de alunecare dintre volant şi saboţi este* μ. ***Se cere*** *să se calculeze numărul de ture complete* N_1 *pe care-l efectuează volantul până la oprire.*

Rezolvare

Se izolează volantul, se figurează toate forţele care acţionează (forţele efectiv aplicate şi de legătură) şi se aplică teorema momentului cinetic faţă de axa de rotaţie *Oz:*

$$J_0\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_{oz}\left(\overline{F}_i\right) \qquad (a)$$

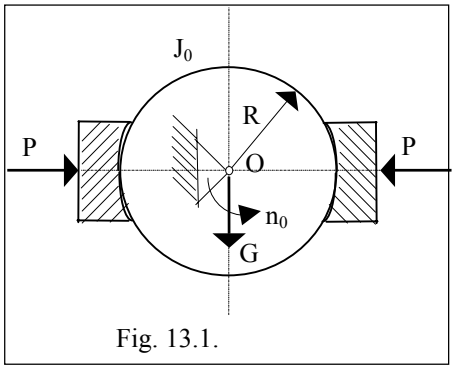


Fig. 13.1.

care, în cazul de faţă se transcrie astfel:

$$J_0\ddot{\varphi} = -2\mu P \cdot R \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\mu P \cdot R}{J_0} \ (=constant) \qquad (b)$$

Integrând succesiv de două ori avem:

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\mu PR}{J_0}t + C_1, \quad \varphi = -\frac{\mu PR}{J_0}t^2 + C_1 t + C_2$$

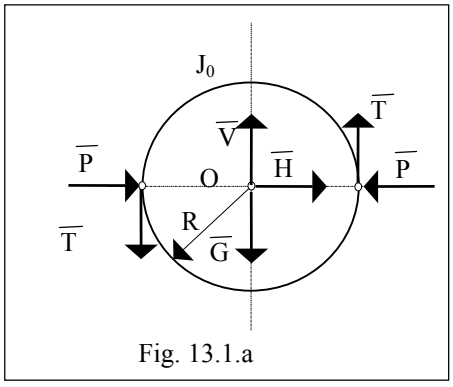


Fig. 13.1.a

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale:

$$t=0\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \dot{\varphi}(0)=\omega_0=\dfrac{\pi n_0}{30}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{\pi n_0}{30}\\ C_2=0\end{cases} \qquad (c)$$

Se obţin legile de mişcare pentru viteza unghiulară ω şi unghiul de rotaţie φ:

$$\omega = -\frac{2\mu PR}{J_0}t + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\varphi = -\frac{\mu PR}{J_0}t^2 + \frac{\pi n_0}{30}t \qquad (d)$$

Pentru oprire se pune condiţia $\omega=0$ şi se calculează timpul t_1 necesar până la oprire din relaţia (d):

$$0 = -\frac{2\mu PR}{J_0}t_1 + \frac{\pi n_0}{30} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi n_0}{60\mu PR}J_0$$

Până la oprire volantul se roteşte cu unghiul

$$\varphi_1 = -\frac{\mu PR}{J_0}t_1^2 + \frac{\pi n_0}{30}t_1 = \frac{\pi^2 n_0^2 J_0}{3600\mu PR} \qquad (e)$$

Numărul de ture până la oprire va fi deci partea întreagă a valorii:

$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\pi n_0 J_0}{7200\mu PR} \qquad (f)$$

Observaţie: În cazul volantului sub forma unui disc omogen se poate înlocui momentul de inerţie cu: $J_0 = \frac{M \cdot R^2}{2} = \frac{G}{2g}R^2$.

13.2. Se consideră *un disc omogen de rază R şi greutate G având înfăşurat pe circumferinţa sa un fir fixat în punctul A (fig. 13.2). Discul este lăsat să cadă liber pe verticală plecând din repaus .*

Se cer *legea de mişcare şi tensiunea din fir.*

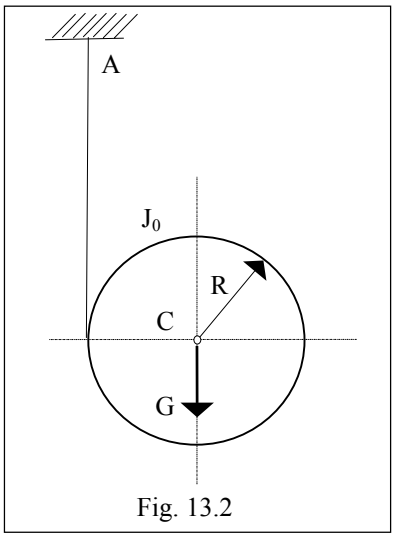


Fig. 13.2

Rezolvare

Se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice pentru intervalul de timp (t_0, t_1):

$E_1 - E_0 = L_{0-1}$ (a)

unde: $E_0 = 0$, deoarece $v_0 = 0$ şi

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_{cz}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\cdot\frac{v^2}{R^2}$$

$$E_1 = \frac{3}{4}\frac{G}{g}v_c^2$$

Lucrul mecanic efectuat asupra discului pentru acelaşi interval de timp este $L_{0-1} = Gh$,

h fiind deplasarea greutăţii G aplicată în centrul discului

Diferenţiind relaţiile anterioare avem:

$$dE = \frac{3}{2}\frac{G}{g}v_c a_c dt$$

$$dL = Gv_c dt \qquad (b)$$

$$unde \quad \dot{h} = v_c, \quad \dot{v}_c = a_c$$

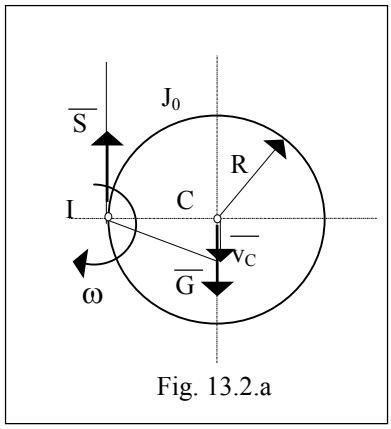


Fig. 13.2.a

Din teorema energiei scrisă sub forma diferenţială $dE = dL$ se obţine acceleraţia centrului discului:

$$a_c = \frac{2}{3}g \qquad (c)$$

Aplicând teorema impulsului în proiecţii pe verticală:

$$Ma_c = Y \qquad sau \qquad \frac{G}{g}a_c = Y \qquad (d)$$

unde : Y reprezintă suma proiecțiilor pe verticală (pe axa Cy) a tuturor forțelor

Prin urmare din (d) putem deduce tensiunea din fir *S*:

$$\frac{G}{g}a_c = G - S \Rightarrow S = \frac{G}{3} \qquad \text{(e)}$$

Observație: Aceleaşi rezultate se obțin dacă se foloseşte teorema momentului cinetic scrisă succesiv, față de centrul instantaneu de rotație I şi față de centrul discului C avem:

$$J_{Iz}\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_{Iz}(F_i) \qquad \Rightarrow \frac{G}{g}\frac{3R^2}{2}\ddot{\varphi} = G \cdot R$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_{i} M_{Cz}(F_i) \qquad \Rightarrow \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}\ddot{\varphi} = S \cdot R$$

Ținând seama că $\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{a_c}{R}$ se obțin relațiile (c) şi (e).

13.3. ***Se consideră*** *bara OA de lungime 2a şi greutate G articulată în O din fig. 13.3, care se află la momentul inițial în repaus în poziție orizontală, de unde i se dă drumul fără viteză inițială. Articulația O este fără frecare.* ***Se cere*** *să se determine viteza unghiulară şi unghiul* α *format de reacțiunea totală din O* R^{leg} *şi axa longitudinală a barei.*

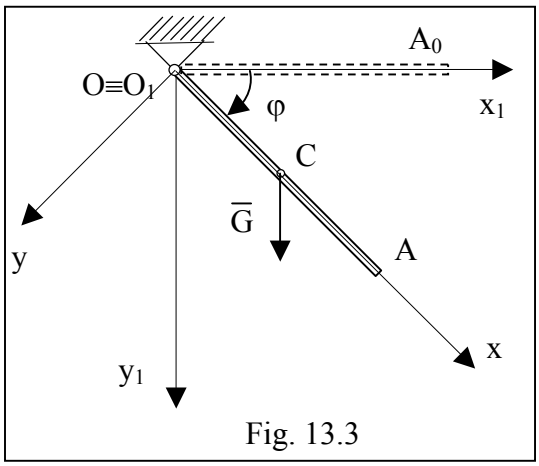


Fig. 13.3

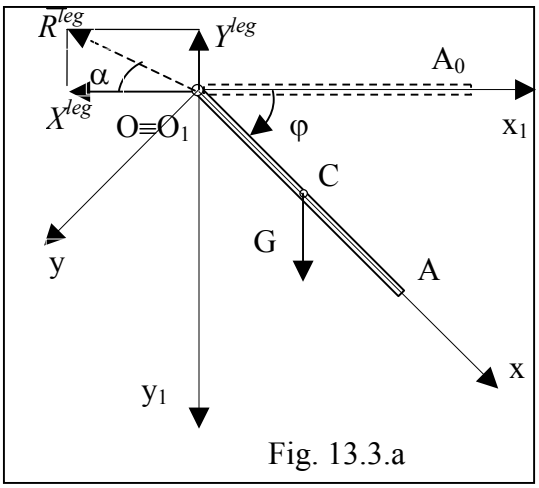


Fig. 13.3.a

Rezolvare

Metoda I . Se ale un sistem de axe fix cu axa O_1z_1 să coincidă cu axa de rotația a barei şi acelaşi sens cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ şi un sistem de axe mobil cu axa Ox să coincidă cu axa longitudinală a barei iar Oz să coincidă cu axa O_1z_1 (fig13.3.a). Viteza unghiulară rezultă din teortema momentului cinetic scrisă sub forma:

$$J_z\varepsilon = M_z \quad sau: J_z\ddot{\varphi} = M_z$$

unde : (a)

$$J_z = \frac{4a^2G}{3g}, \; iar \;\; M_z = Ga\cos\varphi$$

Deci teorema momentului cinetic devine:

$$\frac{4a^2G}{3g}\ddot{\varphi} = Ga\cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{3g}{4a}\cos\varphi \qquad \text{(b)}$$

Dacă se multiplică ecuația (b) cu : $d\varphi = \dot{\varphi} dt$ şi se integrează se obține:

$$\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi}\,dt = \frac{3g}{4a}\cos\varphi \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{3g}{4a}\sin\varphi + C \qquad \text{(c)}$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale $\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$ care conduce la *C=0*. Deci viteza unghiulară este:

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\varphi} \qquad \text{(d)}$$

Metoda a II-a. Se poate determina viteza unghilară folosind teorema de variație a energiei cinetice sub forma: E_1-E_0=$L_{0\text{-}1}$ (e)

unde $E_0=0$ este energia cinetică la momentul inițial,

iar $E_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2$, este energia cinetică la un moment oarecare t.

$J_0 = \frac{4a^2 G}{3g}$ este momentul de inerție mecanic al barei față de axa de rotație ce trece prin O;

$L_{0-1} = Ga\sin\varphi$, este lucrul mecanic al forței de greutate a barei.

Înlocuind aceste valori se obține acelaşi rezultat (d): $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\varphi}$

Pentru poziția verticală a barei se obține viteza unghiulară (maximă):

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \qquad \text{(f)}$$

2. Pentru determinarea reacțiunii $\overline{R}^{leg}$ se foloseşte teorema impulsului scrisă sub forma teoremei mişcării centrului de masă C, adică:

$$M\ddot{\overline{\rho}}_1 = \overline{R}^{a} + \overline{R}^{leg} \qquad \text{(g)}$$

care proiectată pe axele sistemului fix $O_1x_1y_1$ se obține:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi}_1 = X^{leg} \\ M\ddot{\eta}_1 = Y^{leg} - G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{G}{g}\ddot{\xi}_1 = X^{leg} \\ \frac{G}{g}\ddot{\eta}_1 = Y^{leg} - G \end{cases} \qquad \text{(h)}$$

Unde ξ_1 *si* η_1 sunt coordonatele punctului C. Acestea şi derivatele corespunzătoare se scriu astfel:

$$\begin{cases} \xi_1 = a\cos\varphi \\ \eta_1 = a\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\eta}_1 = a\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 = -a\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{\eta}_1 = a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

Ținând seama de relația (b) a lui $\ddot{\varphi}$ şi (d) a vitezei unghiulare $\dot{\varphi}$, ultimele relații (i) devin:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = \dfrac{9}{8} g \sin 2\varphi \\ \ddot{\eta}_1 = \dfrac{3}{4} g(1 - 3\sin^2 \varphi) \end{cases} \qquad \text{(j)}$$

astfel încât relațiile (h) devin:

$$\begin{cases} X^{leg} = \dfrac{9}{8} G \sin 2\varphi \\ Y^{leg} = G\left[1 + \dfrac{3}{4}(1 - 3\sin^2 \varphi)\right] \end{cases} \qquad \text{(j)}$$

Se obține în final unghiul α căutat (fig.13.3.a):

$$tg\alpha = \frac{1 + \dfrac{3}{4}(1 - 3\sin^2 \varphi)}{\dfrac{9}{8}\sin 2\varphi} \qquad \text{(k)}$$

Pentru două poziții particulare ale barei date de $\varphi=0$ şi $\varphi=90^0$ se obține:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} X^{leg} = 0 \\ Y^{leg} = \dfrac{G}{4} \end{cases} \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} X^{leg} = 0 \\ Y^{leg} = \dfrac{5G}{2} \end{cases} \qquad \text{(l)}$$

13.4. ***Se consideră*** *bara AB de lungime 2ℓ şi greutate G din fig. 13.4.a, care se deplasează fără frecare sprijinindu-se cu extremitățile ei pe un perete vertical şi pe o suprafață orizontală. Bara se află la momentul inițial în repaus făcând cu direcția verticală unghiul θ_0 de unde i se dă drumul fără viteză inițială.*

Se cere *să se determine legea de mişcare şi forțele de legătură cu cele două suprafețe.*

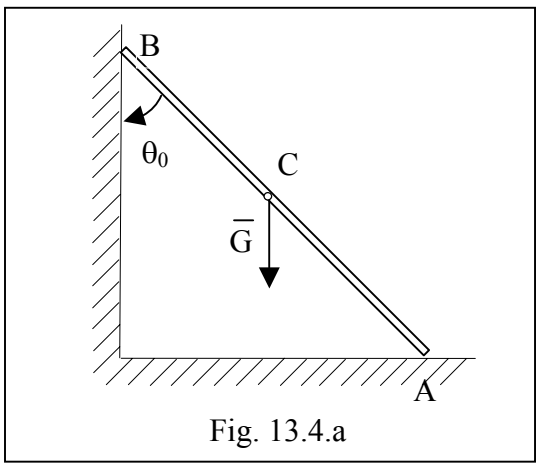


Fig. 13.4.a

Rezolvare

Metoda I . Pentru determinarea mişcării şi a forțelor de legătură se alege sistemul de referință fix $O_1x_1y_1$ în planul vertical al mişcării (fig 13.4.b) şi se aplică teoremele impulsului şi momentului cinetic față de centrul maselor $C(\xi_1, \eta_1)$:

$$M\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{R} \quad si \quad \dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C \qquad \text{(a)}$$

$$\text{unde} \left| \dot{\bar{K}}_C \right| = J_{Cz}\ddot{\theta} = \frac{G}{g}\frac{(2\ell)^2}{12}\ddot{\theta} \qquad \text{(b)}$$

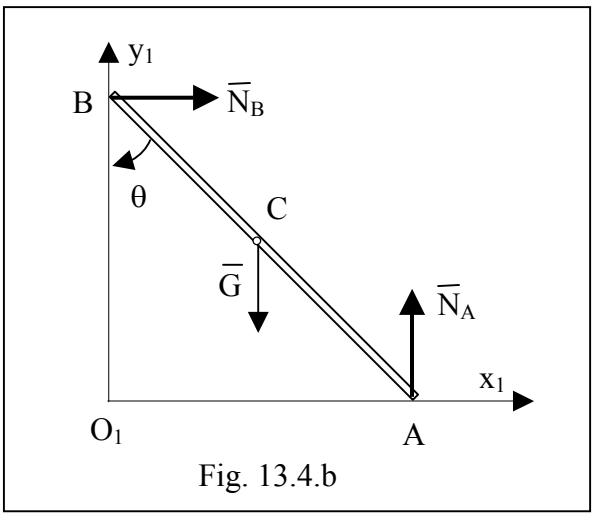


Fig. 13.4.b

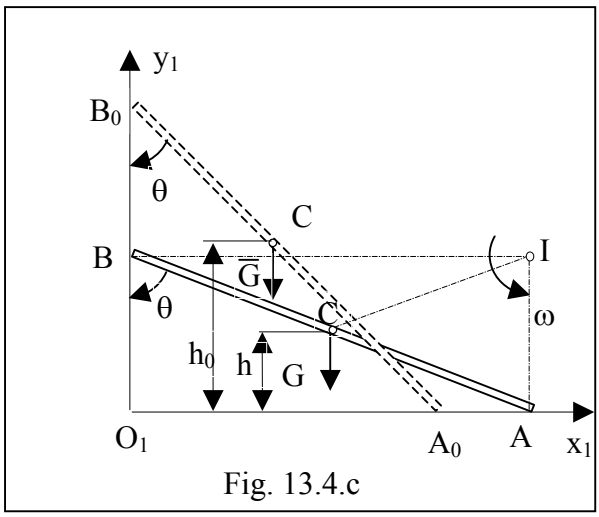


Fig. 13.4.c

În proiecții pe axele sistemului de coordonate aceste relații se scriu:

$$\begin{cases} \dfrac{G}{g}\ddot{\xi}_1 = N_B \\ \dfrac{G}{g}\ddot{\eta}_1 = N_A - G \end{cases} \quad \text{(c)} \quad \text{respectiv:} \quad \frac{G\ell^2}{3g}\ddot{\theta} = N_A \ell \sin\theta - N_B \ell \cos\theta \qquad \text{(d)}$$

Coordonatele centrului de masă şi derivatele corespunzătoare se scriu astfel:

$$\begin{cases} \xi_1 = \ell \sin\theta \\ \eta_1 = \ell \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\eta}_1 = -\ell\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 = \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{\eta}_1 = -\ell\ddot{\theta}\sin\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Introducând aceste rezultate în relațiile (c) se obține:

$$\begin{cases} \dfrac{G}{g}\ell\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = N_B \\ -\dfrac{G}{g}\ell\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = -G + N_A \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Introducând aceste rezultate în relațiile (d) se obține ecuația diferențială a mişcării: $\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{4\ell}\sin\theta$ (g)

Dacă se multiplică ecuația (g) cu : $d\theta = \dot{\theta}dt$ şi se integrează se obține:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta}\,dt = \frac{3g}{4\ell}\sin\theta \cdot d\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{4\ell}\cos\theta + C \qquad \text{(h)}$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \;\; si \;\; \dot{\theta} = 0 \;\; \text{, care conduce la } C = \frac{3g}{4\ell}\cos\theta_0 . \qquad \text{(i)}$$

Deci legea de mişcare este:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2\ell}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) \qquad \text{(j)}$$

Forțele de legătură N_A şi N_B se obțin înlocuind în relațiile (f) $\ddot{\theta}$ *si* $\dot{\theta}^2$ obținute în relațiile (g) şi (j):

$$\begin{cases} N_B = G\left(\frac{3}{4}sin\theta cos\theta - \frac{3}{2}(cos\theta_0 - cos\theta)sin\theta\right) \\ N_A = G\left(1 - \frac{3}{4}sin\theta sin\theta - \frac{3}{2}(cos\theta_0 - cos\theta)cos\theta\right) \end{cases} \quad (k)$$

Metoda a II-a. Se poate determina viteza unghilară folosind teorema de variație a energiei cinetice sub forma: E_1-E_0=L_{0-1} (l)

unde $E_0=0$ este energia cinetică la momentul inițial,

iar $E_1 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}J_{cz}\omega^2$, este energia cinetică la un moment oarecare t_1.

$J_{Cz} = \frac{G}{g}\frac{(2\ell)^2}{12} = \frac{G\ell^2}{3g}$ este momentul de inerție mecanic al barei față de axa de rotație ce trece prin C;

Deci: $E_1 = \frac{2G\ell^2}{3g}\omega^2$ (m)

$L_{0-1} = G(h_0 - h) = G\ell(cos\theta_0 - cos\theta)$, este lucrul mecanic al forței de greutate a barei. Înlocuind aceste valori se obține acelaşi rezultat (j):

$$\frac{2G\ell^2}{3g}\omega^2 = G\ell(cos\theta_0 - cos\theta) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{2\ell}(cos\theta_0 - cos\theta) \quad (n)$$

Derivând în raport cu timpul relația (n) se obține (g):

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell}\dot{\theta}sin\theta \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{3g}{4\ell}sin\theta \quad (o)$$

13.5. ***Se consideră*** *sistemul format dintr-un corp de greutate G_1 şi un disc omogen de rază R şi greutate G_2 având înfăşurat pe circumferința sa un fir de care este fixat primul corp (fig. 13.5). Corpul este lăsat liber plecând din repaus.* ***Se cere*** *legea de mişcare şi tensiunea din fir.*

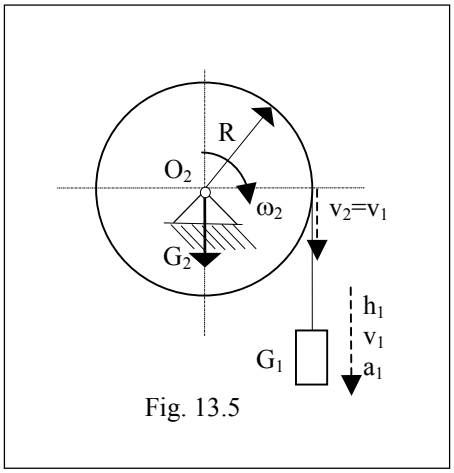


Fig. 13.5

Rezolvare

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice sub forma diferențială:

$dE = dL$ (a)

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

unde:

$$unde \quad \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \quad J_2 = \frac{G_2R_2^2}{2g}$$

Rezultă: $E = \frac{v_1^2}{4g}(2G_1 + G_2)$ (b)

Diferențiind relația (b) rezultă: $dE = \frac{1}{2g}(2G_1 + G_2)v_1 a_1 dt$ (b')

$$L = L_1 + L_2 = G_1 h_1 + 0 \quad \Rightarrow dL = G_1 v_1 dt \tag{c}$$

Înlocuind în relația (a) rezultă accelerația sistemului:

$$a_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} g \tag{d}$$

Integrând succesiv de două ori relația (d) se obține viteza şi deplasarea corpului 1:

$$v_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} gt + C_1 \quad si \quad h_1 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{e}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se obțin din condițiile inițiale:

$t=0 \Rightarrow v_1=0, \quad h_1=0,$ rezultă aşadar: $C_1=C_2=0.$

Deci relațiile (e) se scriu:

$$v_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} gt_1 \quad si \quad h_1 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} gt^2 \tag{f}$$

Viteza şi deplasarea corpului 2 se obțin ținând seama de relația (b):

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} \frac{g}{R_2} t_1 \quad si \quad \varphi_2 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} \frac{g}{R_2} t^2 \tag{g}$$

2) Pentru calculul tensiunii din fir S se separă cele două corpuri şi se scrie teorema impulsului pentru corpul 1(fig. 13.5.a):

$$M_1 \bar{a}_1 = \sum \bar{F}^a + \bar{F}^{leg} \tag{g}$$

care în proiecție pe direcția mişcării se scrie:

$$\frac{G_1}{g} a_1 = G_1 - S \quad \Rightarrow S = G_1\left(1 - \frac{a_1}{g}\right) = \frac{G_1 G_2}{2G_1 + G_2} \tag{h}$$

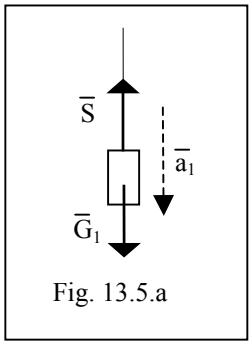


Fig. 13.5.a

13.6. ***Se consideră*** *sistemul format dintr-un troliu de raze R şi r, de greutate G_3 pe circumferințele troliului fiind înfăşurate două fire inextensibile de care sunt prinse două greutăți G_1 şi G_2 (fig. 13.6). Se neglijează frecările. Sistemul este lăsat liber plecând din repaus .* ***Se cere*** *legea de mişcare a sistemului şi tensiunile din cele două fire.*

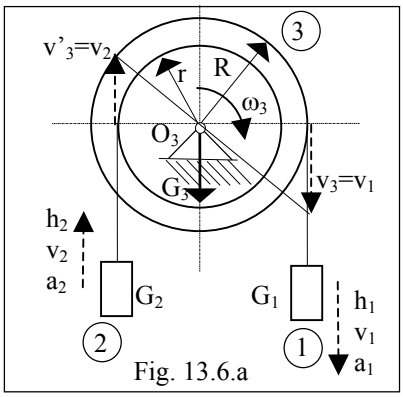


Fig. 13.6.a

Rezolvare

Firele fiind inextensibile $dL^{int} = 0$, astfel încât pentru determinarea mişcării se aplică teorema de variație a energiei cinetice sub forma diferențială:

$$dE = dL \tag{a}$$

Se face o analiză cinematică a mişcării celor două corpuri ale sistemului (2 şi 3) în funcție de mişcarea corpului 1, conform tabelului de mai jos.

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Acceleraţia	Deplasarea virtuală
1 Translaţie	h_1	v_1	a_1	δh_1
2 Translaţie	$h_2 = \frac{rh_1}{R}$	$v_2 = \frac{rv_1}{R}$	$a_2 = \frac{ra_1}{R}$	$\delta h_2 = \frac{r\delta h_1}{R}$
3 Rotaţie	$\varphi_3 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{R}$

Energia cinetică totală a sistemului fiind:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}v_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 \qquad (a)$$

Dacă presupunem că discul 3 este omogen de rază R şi masă G_3/g atunci momentul de inerţie se scrie: $J_3 = \frac{G_3R^2}{2g}$.

Deci energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = \frac{v_1^2}{4g}\left(2G_1 + \frac{2r^2}{R^2}G_2 + G_3\right) \qquad (b)$$

Diferenţiind relaţia (b) rezultă: $dE = \frac{1}{2g}\left(2G_1 + \frac{2r^2}{R^2}G_2 + G_3\right)v_1 a_1 dt$ (b')

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = G_1h_1 + 0 - G_3h_3 = \left(G_1 - \frac{r}{R}G_2\right)h_1 \qquad (c)$$

Diferenţiind relaţia (b) rezultă: $dL = \left(G_1 - \frac{r}{R}G_2\right)v_1 dt$ (c')

Înlocuind în expresia teoremei energiei cinetice $dE=dL$, rezultă acceleraţia sistemului:

$$a_1 = \frac{\left(G_1 - \frac{r}{R}G_2\right)}{\left(G_1 + \frac{r^2}{R^2}G_2 + \frac{G_3}{2}\right)}g \qquad (d)$$

Integrând succesiv de două ori relaţia (d) se obţine viteza şi respectiv deplasarea corpului 1: $v_1 = a_1t + C_1$ *si* $h_1 = a_1t^2 + C_1t + C_2$ (e)

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se obţin din condiţiile iniţiale:

$t=0 \Rightarrow v_1=0,\ \ h_1=0,$ rezultă aşadar: $C_1=C_2=0.$

Vitezele şi deplasările corpurilor 2 şi 3 se obţin ţinând seama de relaţiile din tabelul de mai sus.

2) Pentru calculul tensiunii S din fir se separă cele trei corpuri şi se scrie:

- teorema impulsului pentru corpul 1 (fig. 13.6.a):

$$M_1\bar{a}_1 = \sum \bar{F}^a + \bar{F}^{leg} \qquad (f)$$

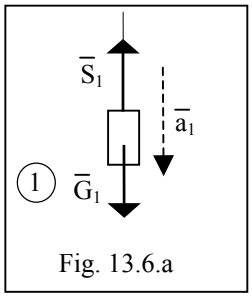


Fig. 13.6.a

care în proiecție pe direcția mișcării se scrie:

$$\frac{G_1}{g}a_1 = G_1 - S_1 \quad \Rightarrow S_1 = G_1\left(1-\frac{a_1}{g}\right) \qquad \text{(g)}$$

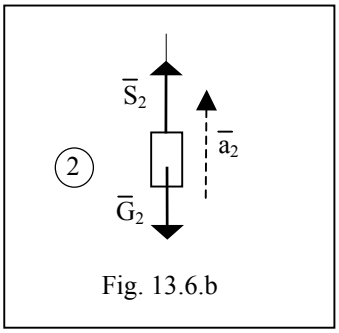


Fig. 13.6.b

- teorema impulsului pentru corpul 2 (fig. 13.6.b):

$$M_2\bar{a}_2 = \sum\left(\bar{F}^a + \bar{F}^{leg}\right) \qquad \text{(h)}$$

care în proiecție pe direcția mișcării se scrie:

$$\frac{G_2}{g}\frac{r}{R}a_1 = -G_2 + S_2 \quad \Rightarrow S_2 = G_2\left(1+\frac{a_1}{g}\frac{r}{R}\right) \qquad \text{(i)}$$

- teorema impulsului pentru corpul 3 (fig. 13.6.c):

$$M_3\bar{a}_3 = \sum\left(\bar{F}^a + \bar{F}^{leg}\right) \qquad \text{(h)}$$

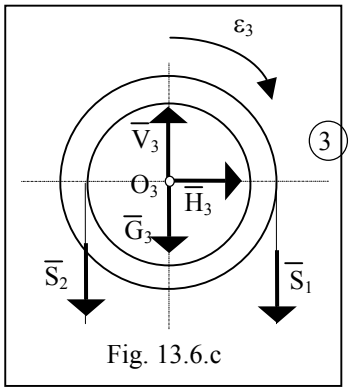


Fig. 13.6.c

care în proiecție pe cele două direcții se scrie:

$$0 = H_3$$

$$0 = V_3 - G_3 - S_1 - S_2 \Rightarrow V_3 = G_3 + S_1 + S_2 \qquad \text{(i)}$$

$$V_3 = G_1\left(1-\frac{a_1}{g}\right) + G_2\left(1+\frac{a_1}{g}\frac{r}{R}\right) + G_3$$

- teorema momentului cinetic pentru corpul 3:

$$J_3\varepsilon_3 = \sum\left(M^a + M^{leg}\right)$$

$$\frac{G_3R_2}{2g}\frac{a_1}{R} = S_1R - S_2r \qquad \text{(j)}$$

Observație:

Relația (j) este o relația de verificare, întrucât în aceasta toate mărimile sunt cunoscute. Dacă nu se aplică teorema energiei cinetice atunci relațiile obținute prin separarea corpurilor şi aplicarea teoremelor impulsului şi momentului cinetic sunt suficiente pentru determinarea mişcării şi a forțelor de legătură ale sistemului.

13.7. ***Se consideră*** *sistemul de corpuri din fig. 13.7, în care mărimile R, G, α, sunt cunoscute. Corpul (1) coboară pe planul înclinat (se neglijează frecarea de alunecare) având parametrii cinematicii: h_1, v_1, a_1; corpul (2) se consideră omogen de rază R_2 şi este antrenat prin intermediul firului într-o mişcare de rotație (fără frecare în lagărul O_2), iar corpul (3) se deplazează în sus având o mişcare plan-paralelă.*

Se cere:

1) *Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul teoremei energiei cinetice (parametrii h_1, v_1, a_1);*
2) *Să se determine forțele de legătură, prin aplicarea teoremelor impulsului şi a momentului cinetic.*

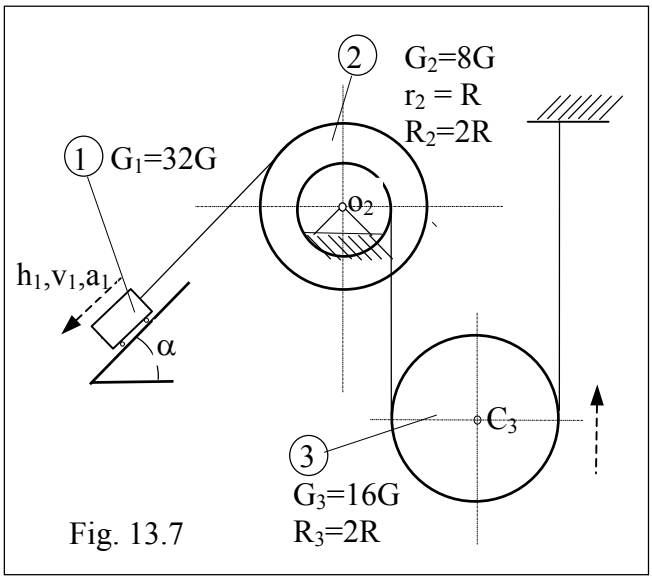


Fig. 13.7

Rezolvare

1) Pentru rezolvarea problemei se face mai întâi o analiză cinematică a mişcării, adică găsirea relațiilor de lanț cinematic, ceea ce înseamnă exprimarea parametriilor cinematici ai corpurilor (2) şi (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări şi accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 13.7.a) Astfel:

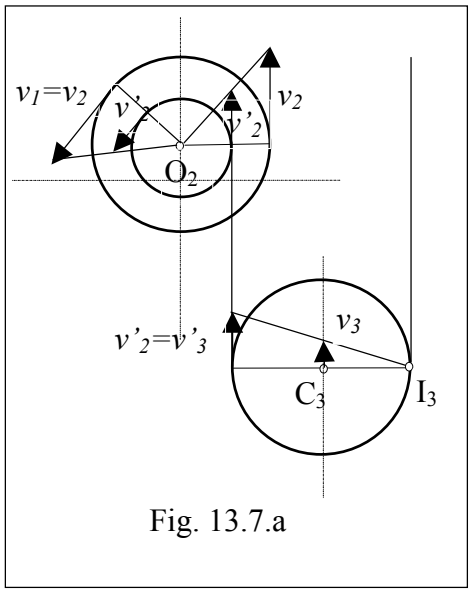


Fig. 13.7.a

Pentru corpul 1 şi 2:

$$v_1 = v_2$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v'_2}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{2R} = \frac{v'_2}{R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{v_1}{2R} \\ v'_2 = \dfrac{v_1}{2} \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Pentru corpul 3:

$$v'_3 = v'_2 = \frac{v_1}{2}$$

$$\omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_1}{8R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = \dfrac{v_1}{4} \\ \omega_3 = \dfrac{v_1}{8R} \end{cases} \quad \text{(b)}$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	h_1	v_1	a_1	δh_1
(2) Rotație	$\varphi_2 = \dfrac{h_1}{2R}$	$\omega_2 = \dfrac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta h_1}{2R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = \dfrac{h_1}{4}$	$v_3 = \dfrac{v_1}{4}$	$a_3 = \dfrac{a_1}{4}$	$\delta h_3 = \dfrac{\delta h_1}{4}$
	$\varphi_3 = \dfrac{h_1}{8R}$	$\omega_3 = \dfrac{v_1}{8R}$	$\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{8R}$	$\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta h_1}{8R}$

Aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru întregul sistem de corpuri, sub forma

$$dE = dL \qquad (c)$$

unde energia cinetică totală E este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

$$E_1 = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_1^2 = 16\frac{G}{g}v_1^2$$

Presupunând că cele două roți sunt omogene, putem scrie:

$$E_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M_2R_2^2}{2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{8G}{2g}4R^2\frac{v_1^2}{4R} = 2\frac{G}{g}v_1^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2}M_3 v_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}\frac{16G}{g}\frac{v_1^2}{16} + \frac{1}{2}\frac{16G}{2g}4R^2\frac{v_1^2}{64R} = \frac{3}{4}\frac{G}{g}v_1^2 \qquad (d)$$

Prin urmare: $E = \frac{75}{4}\frac{G}{g}v_1^2 \Rightarrow dE = \frac{75}{2}\frac{G}{g}a_1 v_1 dt$ (e)

Lucrul mecanic total al forțelor sistemului, conform fig. 13.7.b, este:

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

unde: $L_1 = (G_1 \sin\alpha)h_1 = (32G\sin\alpha)h_1;\quad L_2 = 0;\quad L_3 = -G_3h_3 = -4Gh_1$

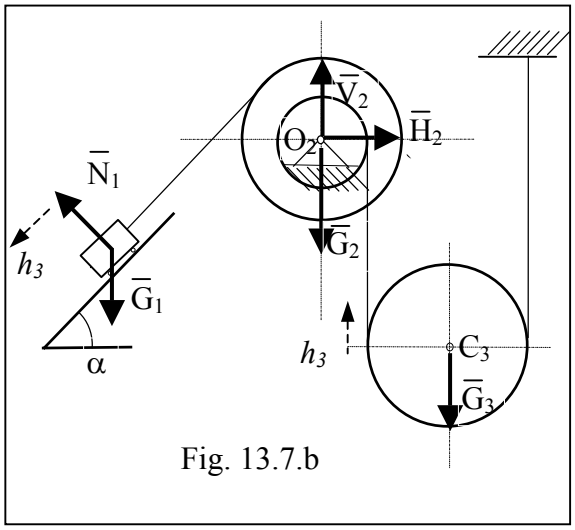


Fig. 13.7.b

Prin urmare:

$$L = 4G(8\sin\alpha - 1)h_1$$
$$\Rightarrow dL = 4G(8\sin\alpha - 1)v_1 dt \qquad (f)$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice (c) expresiile lui *dE* şi *dL* se obține accelerația corpului (1):

$$a_1 = \frac{8(8\sin\alpha - 1)}{75}g \qquad (g)$$

Prin integrare succesivă se obține viteza v_1 şi respectiv deplasarea h_1.

2) Calculul reacțiunilor

Se separă corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, fiecare corp fiind acționat de forțele efective aplicate şi de forțe de legătură (reacțiuni) şi se scriu teoremele generale (teorema impulsului şi a momentului cinetic)

a. Pentru corpul (1)(fig. 13.7.c)

teorema impulsului se scrie astfel:

$$M_1\bar{a}_1 = \bar{R}_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{G_1}{g}a_1 = G_1\sin\alpha - S_1 \\ 0 = -G_1\cos\alpha + N_1 \end{cases} \qquad (i)$$

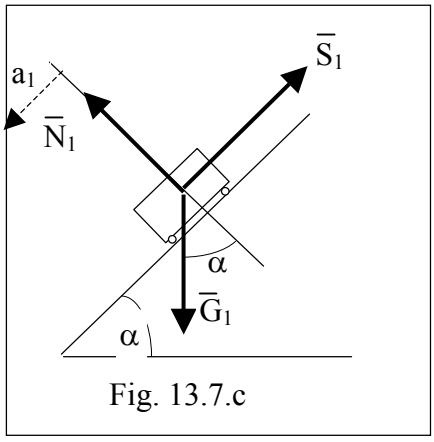


Fig. 13.7.c

se obține:

$$S_1 = \frac{32G}{75}(11\sin\alpha + 8);\quad N_1 = 32G\cos\alpha \qquad (j)$$

b. Pentru corpul (2) se scriu atât teorema impulsului cât şi teorema momentului cinetic în raport cu centrul maselor O_2 (fig. 13.7.d):

$$M_2\bar{a}_2=\bar{R}_2\Rightarrow\begin{cases}0=H_2-S_1\cos\alpha\\0=V_2-S_1\sin\alpha-G_2-S_2\end{cases} \quad (k)$$

$$J_2\varepsilon_2=\sum M_{O_2Z}\Rightarrow\frac{8G}{g}\cdot\frac{(2R)^2}{2}\cdot\frac{a_1}{2R}=S_1\cdot 2R-S_2\cdot R$$

$$\Rightarrow\qquad S_2=\frac{64G}{75}(3\sin\alpha+9); \quad (l)$$

$$H_2=S_1\cos\alpha;\quad V_2=S_1\sin\alpha+G_2+S_2$$

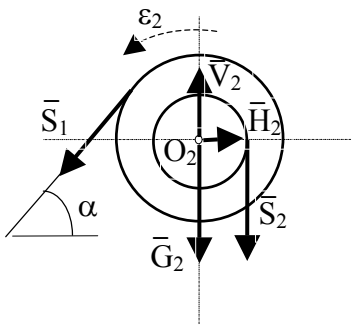


Fig. 13.7.d

c. Pentru corpul (3), se se scriu atât teorema impulsului cât şi teorema momentului cinetic în raport cu centrul maselor C_3 (fig. 13.7.e):

$$M_3\bar{a}_3=\bar{R}_3\Rightarrow\quad\begin{cases}\frac{G_3}{g}a_3=S_2+S_3-G_3\end{cases} \quad (m)$$

$$J_3\varepsilon_3=\sum M_{C_3Z}\Rightarrow\frac{16G}{g}\cdot\frac{4R^2}{2}\cdot\frac{a_1}{8R}=(S_2-S_3)\cdot 2R$$

Din prima ecuație (m) $\Rightarrow S_3=\frac{16G}{75}(4\sin\alpha+37)$

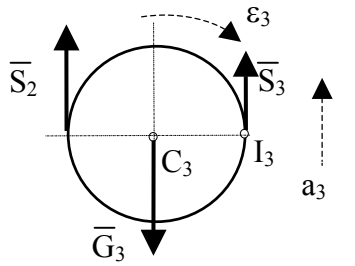


Fig. 13.7.e

Observații: a. Ultima ecuație din cele două ecuații (m) este pentru verificare.

b. Această problemă este rezolvată şi în capitolul XIV folosind principiile mecanicii analitice (problema 14.1.6).

13.8. ***Se consideră*** *sistemul din figură unde mărimile R, G, α, sunt cunoscute. Roata (3) de rază R_3 coboară pe planul înclinat, rostogolindu-se fără alunecare ($s\neq 0$), roata (2) de rază R_2 se este antrenată prin intermediul unui fir într-o mişcare de rotație (fără frecare în lagărul O_2), iar corpul (1) se deplazează în sus având parametrii cinematicii h_1, v_1, a_1 (fig. 13.8). Presupunem că roțile 2 şi 3 sunt omogene .* ***Se cere:***

1. *Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul teoremei energiei cinetice (parametrii h_1, v_1, a_1);*
2. *Să se determine forțele de legătură, prin aplicarea teoremelor generale*

Rezolvare

1. Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mişcării, adică exprimarea parametriilor cinematici ai corpurilor (2) şi (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări şi accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 13.8.a)

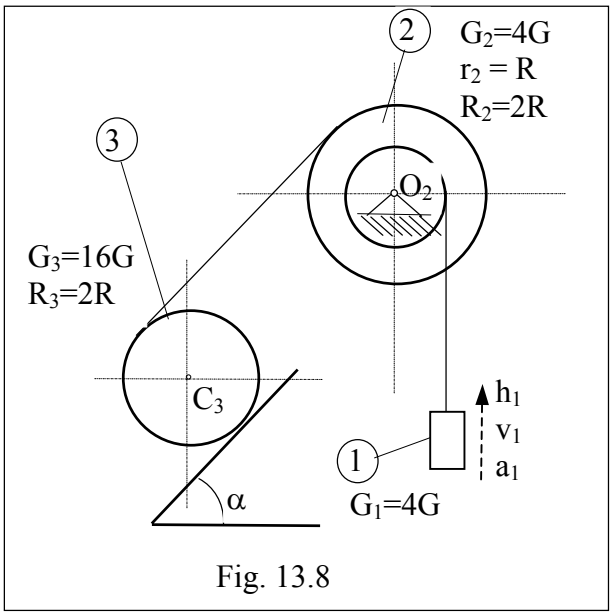


Fig. 13.8

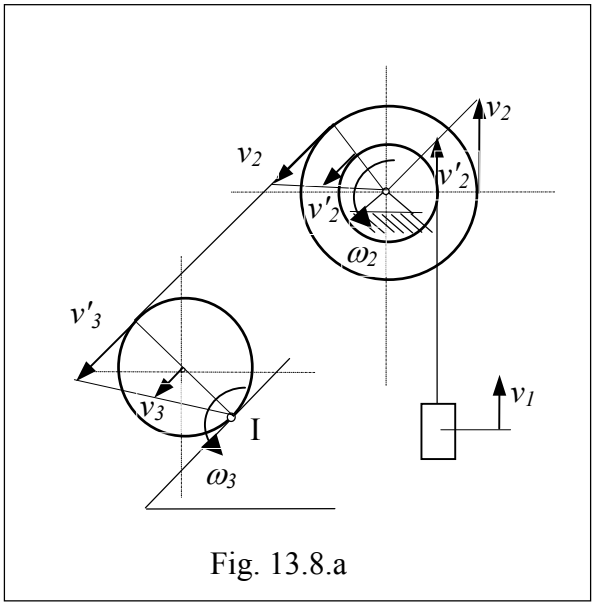


Fig. 13.8.a

Pentru corpul 1 şi 2:

$$v_2' = v_1; \qquad \omega_2 = \frac{v_2'}{r_2} = \frac{v_2}{R_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{2R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{v_1}{R} \\ v_2 = 2v_1 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Pentru corpul 3:

$$v'_3 = v_2 = 2v_1; \quad \omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v'_3}{4R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ \omega_3 = \dfrac{v_1}{2R} \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	h_1	v_1	a_1	δh_1
(2) Rotație	$\varphi_2 = \dfrac{h_1}{R}$	$\omega_2 = \dfrac{v_1}{R}$	$\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta h_1}{R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = h_1$	$v_3 = v_1$	$a_3 = a_1$	$\delta h_3 = \delta h_1$
	$\varphi_3 = \dfrac{h_1}{2R}$	$\omega_3 = \dfrac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta h_1}{2R}$

Aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru întregul sistem de corpuri, sub forma: $dE = dL$ (c)

unde energia cinetică totală E este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri: $E = E_1 + E_2 + E_3$

unde: $E_1 = \dfrac{1}{2} M_1 v_1^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{4G}{g} v_1^2 = \dfrac{2G}{g} v_1^2$

$$E_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M_2R_2^2}{2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4G}{2g}4R^2\frac{v_1^2}{R^2} = \frac{4G}{g}v_1^2$$
$$E_3 = \frac{1}{2}M_3v_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{16G}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{16G}{2g}4R^2\frac{v_1^2}{4R^2} = \frac{12G}{g}v_1^2 \quad \text{(d)}$$

Prin urmare: $E = 18\frac{G}{g}v_1^2 \qquad \Rightarrow dE = 36\frac{G}{g}a_1v_1dt$ (e)

Lucrul mecanic total al forțelor sistemului, conform fig. 13.8.b, este:

$L = L_1 + L_2 + L_3$

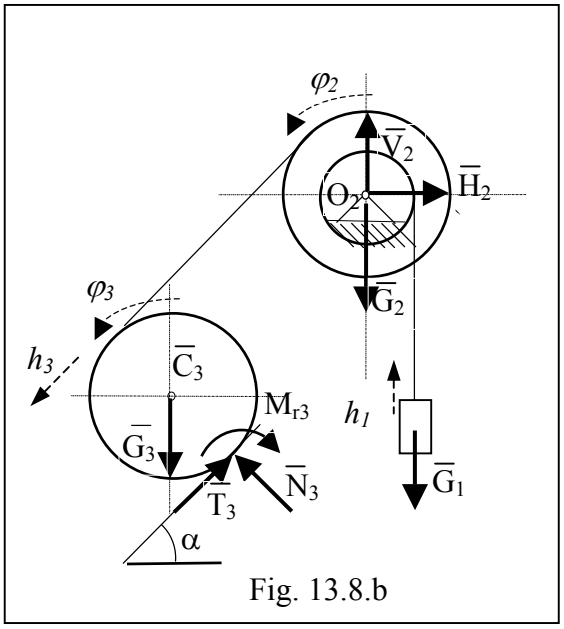


Fig. 13.8.b

unde:

$L_1 = -G_1h_1 = -4Gh_1$

$L_2 = 0$

$L_3 = G_3\,sin\alpha\cdot h_3 - M_{r3}\varphi_3$

$L_3 = G\left(16\,sin\alpha - \frac{8s}{R}cos\alpha\right)h_1$

unde : $M_{r3} = sN_3$

Prin urmare:

$$L = 4G\left(4\,sin\alpha - \frac{2s}{R}cos\alpha - 1\right)h_1$$
$$\Rightarrow dL = 4G\left(4\,sin\alpha - \frac{2s}{R}cos\alpha - 1\right)v_1dt \quad \text{(f)}$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice (3) expresiile lui *dE* şi *dL* se obține accelerația corpului (1): $a_1 = \frac{1}{9}\left(4\,sin\alpha - \frac{2s}{R}cos\alpha - 1\right)g$ (g)

Prin integrare succesivă se obține viteza v_1 şi respectiv deplasarea h_1.

2) Calculul reacțiunilor

Se speră corpurile şi se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, fiecare corp fiind acționat atât de forțe efective aplicate (active) cât şi de forțe de legătură (reacțiuni); se scriu teorema impulsului, respectiv teorema momentului cinetic, pentru fiecare corp separat:

a. Pentru corpul (1) se scrie teorema impulsului (fig. 13.8.c):

$$\frac{G_1}{g}a_1 = S_1 - G_1 \quad \text{(h)}$$

Înlocuind valorile se obține:

$$S_1 = \frac{8G}{9}\left(4 + 2\,sin\alpha - \frac{s}{R}cos\alpha\right) \quad \text{(i)}$$

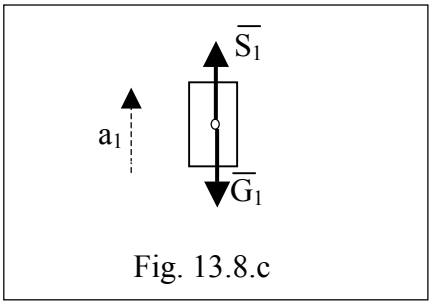


Fig. 13.8.c

b. Pentru corpul (2) se scrie atât teorema impulsului cât şi teorema momentului cinetic față de centrul maselor O_2 (fig. 13.8.d):

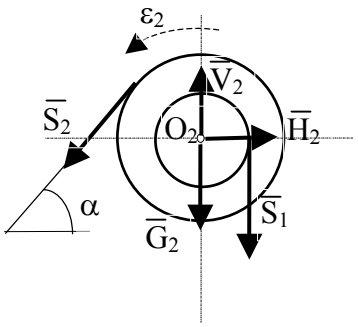


Fig. 13.8.d

$$\begin{cases} 0 = H_2 - S_2 \cos\alpha \\ 0 = V_2 - S_2 \sin\alpha - G_2 - S_1 \\ J_2\varepsilon_2 = S_2 \cdot 2R - S_1 \cdot R \end{cases} \qquad \text{(j)}$$

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$S_2 = \frac{4G}{3}\left(2\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right) \qquad \text{(k)}$$

$$H_2 = S_2 \cos\alpha;\ V_2 = S_2 \sin\alpha + G_2 + S_1$$

c. Pentru corpul (3) se scrie atât teorema impulsului cât şi teorema momentului cinetic față de centrul maselor C_3(fig. 13.8.e):

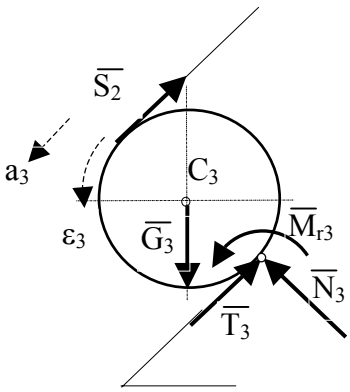


Fig. 13.8.e

$$\begin{cases} \dfrac{G_3}{g}a_3 = -S_2 - T_3 + G_3 \sin\alpha \\ 0 = N_3 - G_3 \cos\alpha \\ J_3\varepsilon_3 = -S_2 \cdot 2R + T_3 \cdot 2R - M_{r3} \end{cases} \qquad \text{(k)}$$

$$M_{r3} = sN_3 \qquad \text{(l)}$$

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$N_3 = 16G\cos\alpha$$

$$M_{r3} = 16G \cdot s \cdot \cos\alpha \qquad \text{(m)}$$

$$T_3 = \frac{4G}{9}\left(14\sin\alpha + 11\frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right)$$

Ultima ecuație din cele trei ecuații (k) este pentru verificare.

Observații:

- Această problemă este rezolvată şi în capitolul XIV folosind principiile mecanicii analitice (problema 14.1.7).
- Dacă se pune condiția de rostogolire fără alunecare a roții 3: $T_3 \le \mu N_3$, rezultă valoarea minimă a coeficientului de frecare pentru acest caz:

$$\mu \ge \frac{T_3}{N_3} \quad sau: \quad \mu_{min} = \frac{T_3}{N_3} = \frac{1}{36\cos\alpha}\left(14\sin\alpha + 11\frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right)$$

PROBLEME PROPUSE

Se consideră *sistemul de corpuri din figurile 13.9...13.13, în care mărimile R, G, α, μ, s sunt cunoscute.*

Se cere:

1) *Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul teoremei de variaţie a energiei cinetice (parametrii h_1, v_1, a_1);*
2) *Să se determine forţele de legătură aplicând teoremele impulsului şi momentului cinetic pentru fiecare corp din sistem.*

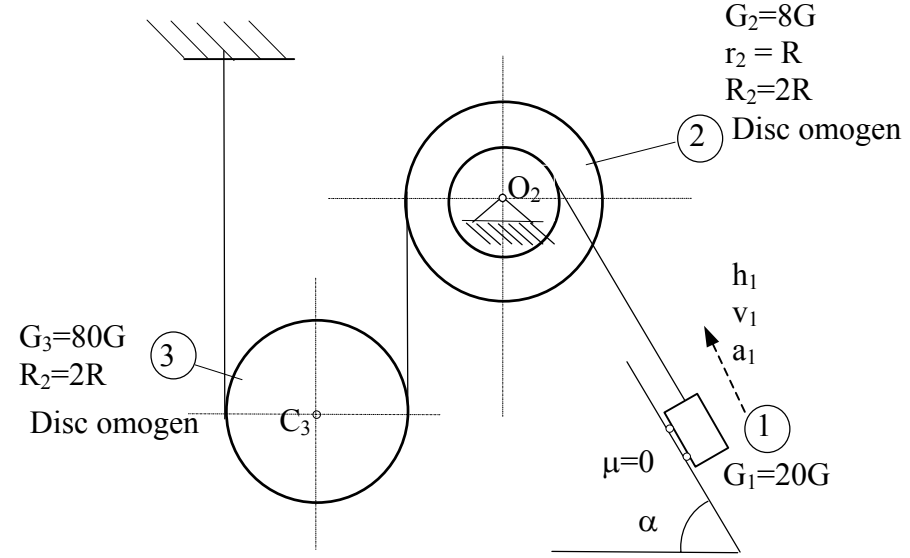


Fig. 13.9

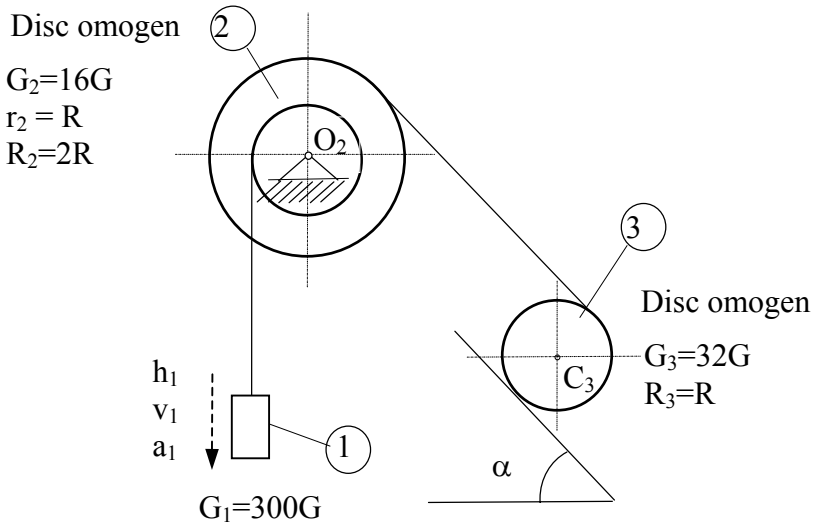


Fig. 13.10

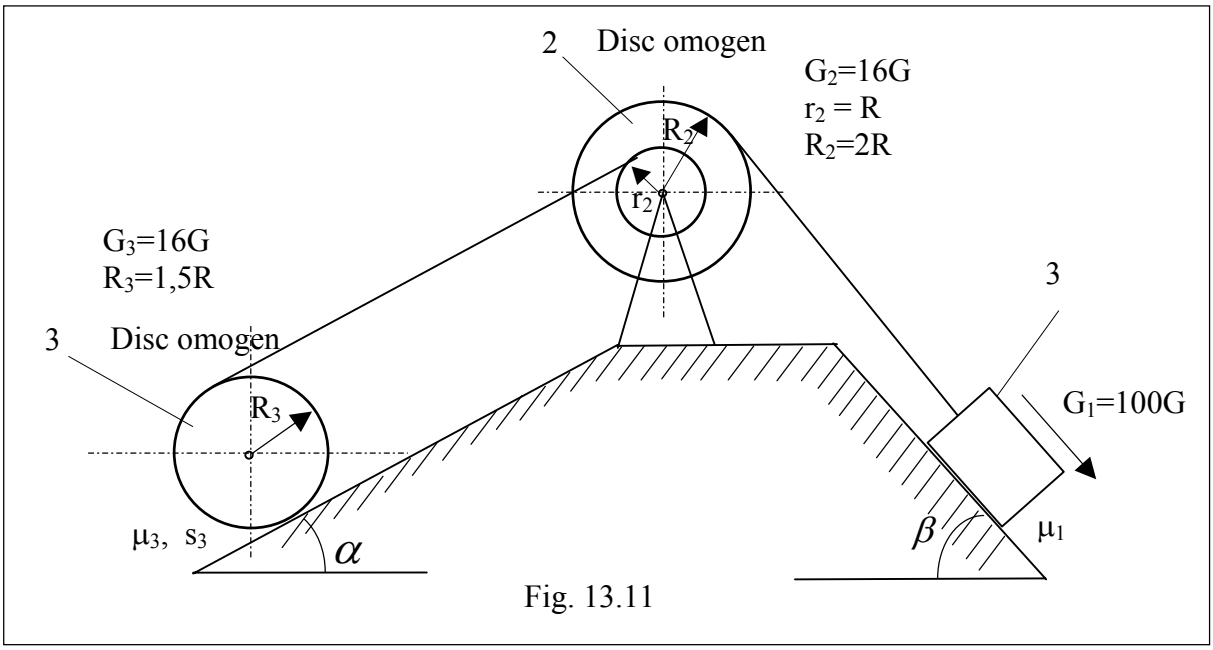


Fig. 13.11

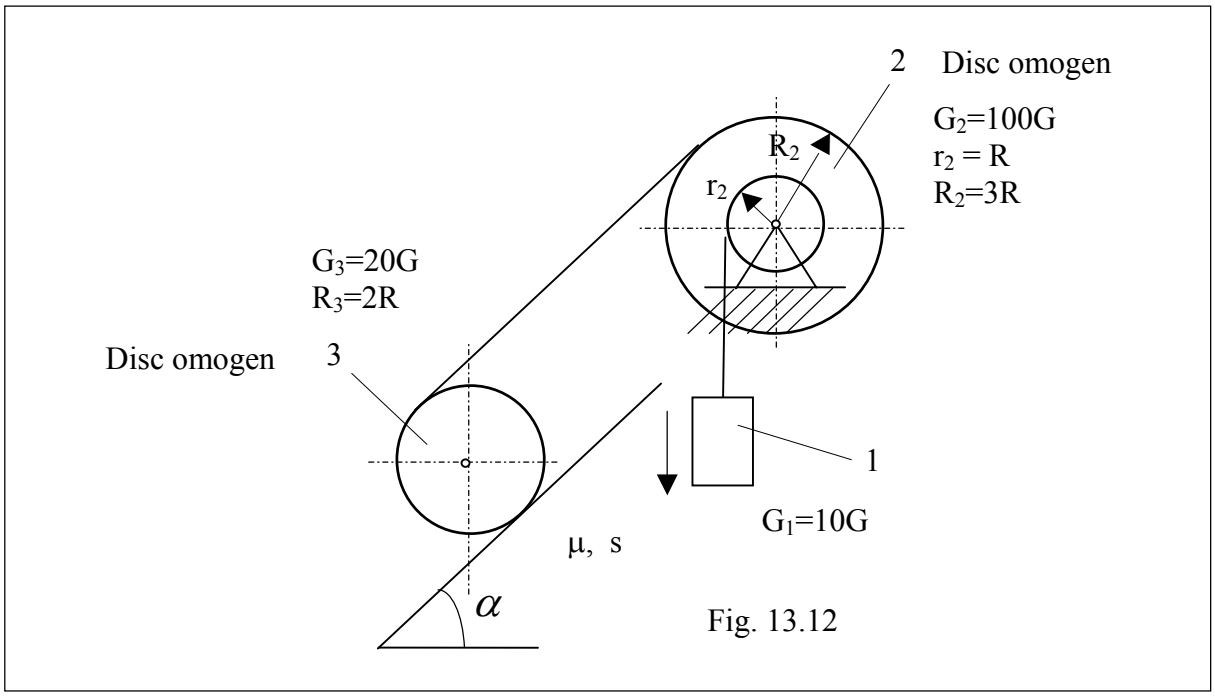


Fig. 13.12

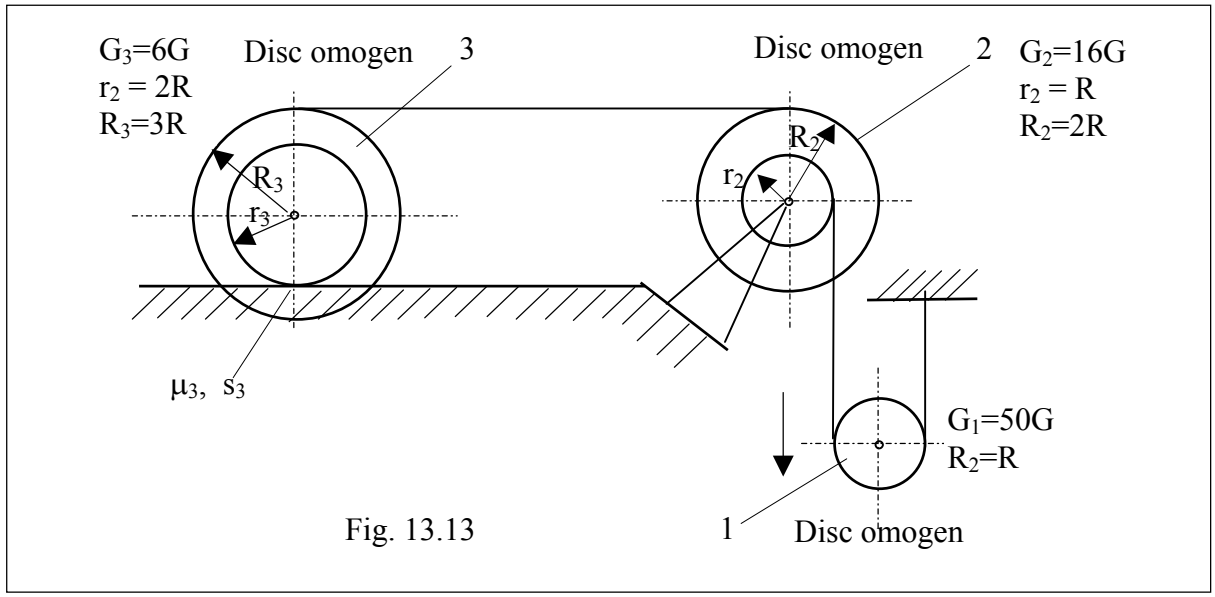


Fig. 13.13

CAPITOLUL XIV
MECANICA ANALITICĂ
14.1. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL ŞI PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

PROBLEME REZOLVATE

14.1.1. ***Se consideră*** *sistemul de bare articulate din fig. 14.1.1, în capătul barei AB, acţionând o forţă orizontală P (se neglijează frecarea din articulaţii) mărimile G_1, G_2, P sunt cunoscute. Se dau: AB=2ℓ, OA=ℓ.* ***Se cere*** *să se găsească poziţia de echilibru a sistemului, folosind principiul lucrului mecanic virtual .*

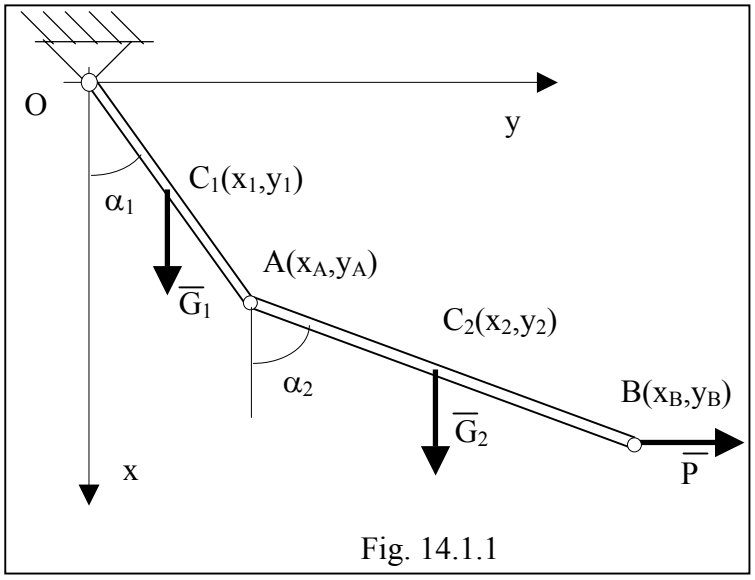


Fig. 14.1.1

Rezolvare

Sistemul are două grade de libertate, reprezentate prin unghiurile α_1 şi α_2, care definesc totodată şi poziţia de echilibru a sistemului.

În acest caz principuiul lucrului mecanic virtual (sau principiul deplasărilor virtuale) se scrie astfel:

$$\delta L = \sum \overline{F}_i \delta \overline{r}_i = 0$$

sau în planul xOy al forţelor:

$$\delta L = G_1 \cdot \delta x_1 + G_2 \cdot \delta x_2 + P \cdot \delta y_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

unde deplasările virtuale se scriu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ell}{2}\cos\alpha_1 && \delta x_1 = -\frac{\ell}{2}\sin\alpha_1 \cdot \delta\alpha_1 \\ x_2 &= \ell\cos\alpha_1 + \ell\cos\alpha_2 \quad \Rightarrow && \delta x_2 = -\ell\sin\alpha_1 \cdot \delta\alpha_1 - \ell\sin\alpha_2 \cdot \delta\alpha_2 \\ y_B &= \ell\sin\alpha_1 + 2\ell\sin\alpha_2 && \delta y_B = \ell\cos\alpha_1 \cdot \delta\alpha_1 + 2\ell\cos\alpha_2 \cdot \delta\alpha_2 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Înlocuind în relaţia (a) şi grupând corespunzător termenii se obţine:

$$\begin{aligned} \delta L = &\left(-G_1\frac{\ell}{2}\sin\alpha_1 - G_2\ell\sin\alpha_1 + P\ell\cos\alpha_1\right)\delta\alpha_1 + \\ &+\left(-2G_2\ell\sin\alpha_2 + 2P\ell\cos\alpha_2\right)\delta\alpha_2 \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Întrucât deplasările virtuale $\delta\alpha_1$ şi $\delta\alpha_2$ sunt foarte mici, dar nenule, rezultă că relaţia (c) este valabilă numai dacă :

$$\begin{cases} -G_1\dfrac{\ell}{2}\sin\alpha_1 - G_2\ell\sin\alpha_1 + P\ell\cos\alpha_1 = 0 \\ -2G_2\ell\sin\alpha_2 + 2P\ell\cos\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Rezolvând acest sistem se obține poziția de echilibru cerută:

$$tg\alpha_1 = \frac{2P}{G_1 + 2G_2}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{P}{G_2} \qquad \text{(e)}$$

14.1.2. ***Se consideră*** *sistemul de bare articulate din fig. 14.1.2, în capătul barei AB, acționând o forță orizontală P (se neglijează frecarea din articulații) mărimile G, Q, α sunt cunoscute. Se dau: $OA_2 = A_2A_4 = 2\ell$,.* ***Se cere*** *se determine mărimea forței F corespunzătoare poziției de echilibru a sistemului din fig. 14.1.2, folosind principiul lucrului mecanic virtual .*

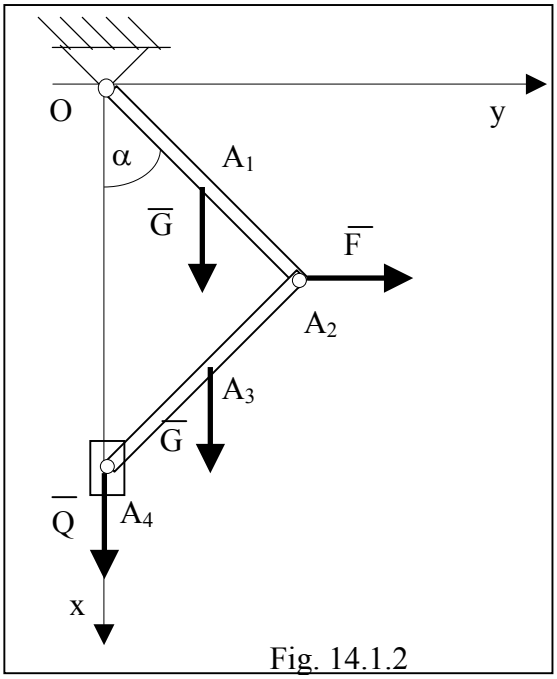


Fig. 14.1.2

Rezolvare

Principiul lucrului mecanic virtual sau principiul deplasărilor virtuale în acest caz se scrie astfel:

$$\delta L = \sum \overline{F}_i \delta \overline{r}_i = 0$$
$$\textit{sau in plan :} \qquad \text{(a)}$$
$$\sum X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i = 0$$

Coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor exterioare sunt: $A_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4,$ iar relația (a) devine:

$$G\delta x_1 + F\delta y_2 + G\delta x_3 + Q\delta x_4 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Deplasările virtuale se exprimă în funcție de datele problemei astfel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell\cos\alpha \\ y_2 &= 2\ell\sin\alpha \\ x_3 &= 3\ell\cos\alpha \\ x_4 &= 4\ell\cos\alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \delta x_1 &= -\ell\sin\alpha\cdot\delta\alpha \\ \delta y_2 &= 2\ell\cos\alpha\cdot\delta\alpha \\ \delta x_3 &= -3\ell\sin\alpha\cdot\delta\alpha \\ \delta x_4 &= -4\ell\sin\alpha\cdot\delta\alpha \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Introducând aceste deplasări în ecuația (b) se obține:

$$\left(-G\sin\alpha + 2F\cos\alpha - 3G\sin\alpha - 4Q\sin\alpha\right)\ell\delta\alpha = 0 \qquad \text{(d)}$$

Întrucât deplasarea virtuală este foarte mică, dar nenulă, rezultă că paranteza trebuie să fie nulă, adică:

$$F = 2(G+Q)tg\alpha \qquad \text{(e)}$$

14.1.3. ***Se consideră*** *sistemul de bare articulate, încastrate şi rezemate simplu, asupra căruia acţionează: o forţă concentrată F, un cuplu M_0 şi o forţă distribuită q ca în fig. 14.1.3 (se neglijează frecarea din articulaţii). Se dau: AB=2a, BC=4a, CD=3a F=qa, $M_0=qa^2$.* ***Se cer*** *reacţiunile: V_A, M_A, V_1 şi V_2 folosind principiul lucrului mecanic virtual.*

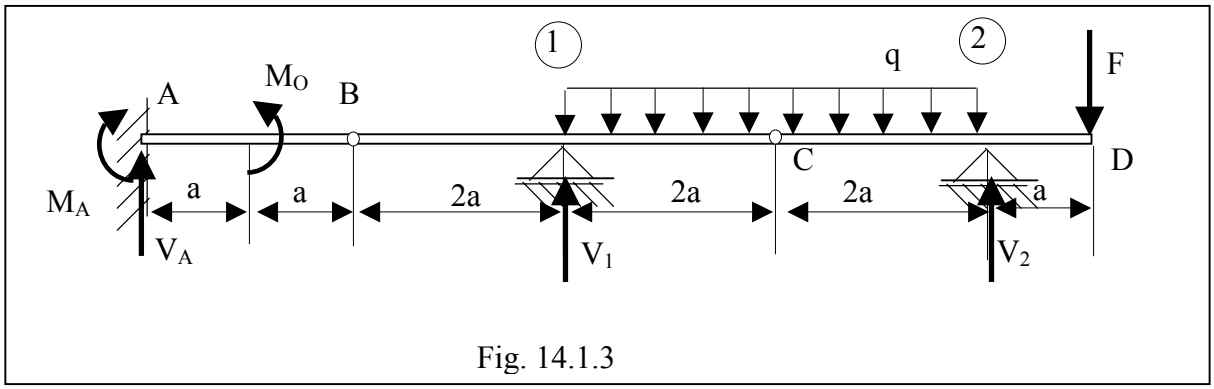


Fig. 14.1.3

Rezolvare

Pentru calculul reacţiunilor se suprimă legătura corespunzătoare, se introduce o reacţiune necunoscută, se aplică apoi sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu celelalte legături şi se exprimă lucrul mecanic al celorlalte forţe corespunzător acestei deplasări virtuale, care conform principiului lucrului mecanic virtual tebuie să fie nul.

a. Astfel, pentru calculul reacţiunii M_A, se suprimă legătura corespunzătoare (încastrarea care împiedică rotirea, înlocuindu-se cu o articulaţie). Se aplică o deplasare virtuală $\delta\theta_A$ compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.a) şi se înlocuieşte efectul forţei distribuite cu dou forţe concentrate *2aq*.

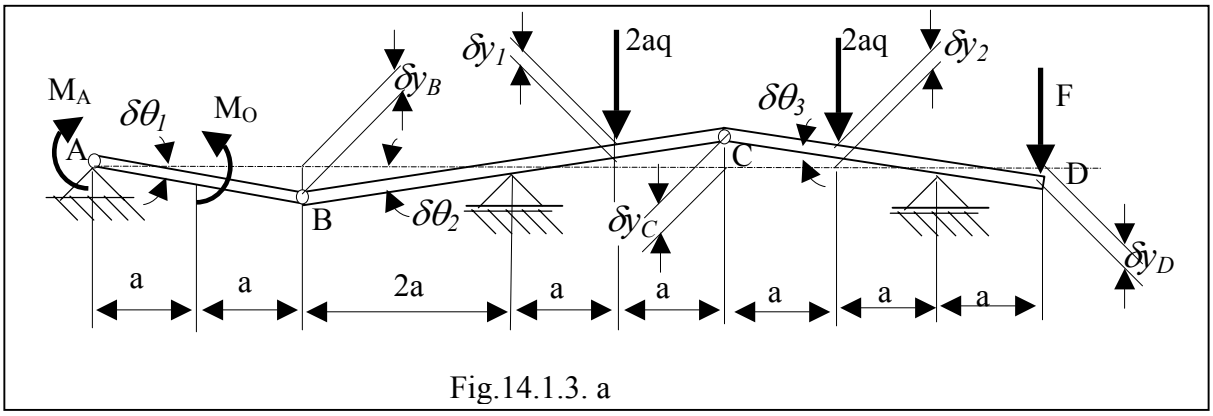


Fig.14.1.3. a

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestor deplasări este:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\theta_A - M_0 \cdot \delta\theta_A - 2aq\delta y_1 - 2aq\delta y_2 + F \cdot \delta y_D = 0 \qquad \text{(a)}$$

Din fig. 14.1.3.a se observă că între deplasările virtuale există relaţiile:

$$tg\delta\theta_1 = \frac{\delta y_B}{2a} \cong \delta\theta_1; \qquad tg\delta\theta_2 = \frac{\delta y_B}{2a} = \frac{\delta y_1}{a} = \frac{\delta y_C}{2a} \cong \delta\theta_2;$$
$$tg\delta\theta_3 = \frac{\delta y_C}{2a} = \frac{\delta y_2}{a} = \frac{\delta y_D}{a} \cong \delta\theta_3; \qquad \text{(b)}$$

care introduse în (a) conduc la: $\delta L = \left(M_A - M_0 - 2a^2q - 2a^2q + F \cdot a\right) \cdot \delta\theta_A = 0$

de unde rezultă: $M_A = 4a^2q$ (c)

b. Pentru calculul reacțiunii V_A se suprimă complet legătura corespunzătoare (încastrarea) şi se aplică o deplasare virtuală δy_A compatibilă cu celelalte legături rămase (fig. 14.1.3.b.) luându-se în considerare şi reacțiunea M_A (ca un cuplu direct aplicat asupra barei).

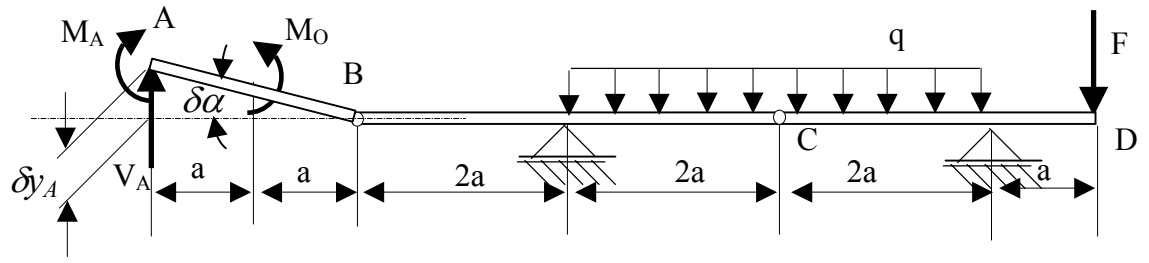


Fig.14.1.3. b

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\alpha - M_0 \cdot \delta\alpha + V_A \cdot \delta y_A = 0 \qquad \text{(d)}$$

Din fig. 14.1.3.b se observă că între cele două deplasări virtuale există relația: $tg\delta\alpha = \dfrac{\delta y_A}{a} \cong \delta\alpha$, deci relația (d) devine:

$$\delta L = \left(\frac{M_A}{a} - \frac{M_0}{a} + V_A\right) \cdot \delta y_A = 0 \text{ de unde rezultă: } V_A = -\frac{3}{2}qa \qquad \text{(e)}$$

c. Pentru calculul reacțiunii V_1, se suprimă legătura corespunzătoare (reazemul simplu 1) şi se aplică o deplasare virtuală δy_1 compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.c.)

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = V_1 \cdot \delta y_1 - 2aq\delta y_2 - 2aq\delta y_3 + F \cdot \delta y_D = 0 \qquad \text{(f)}$$

Din fig. 14.1.3.c se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile: $tg\delta\alpha = \dfrac{\delta y_1}{2a} = \dfrac{\delta y_2}{3a} = \dfrac{\delta y_C}{4a} \cong \delta\alpha$; $tg\delta\beta = \dfrac{\delta y_3}{a} = \dfrac{\delta y_D}{a} = \dfrac{\delta y_C}{2a} \cong \delta\beta$

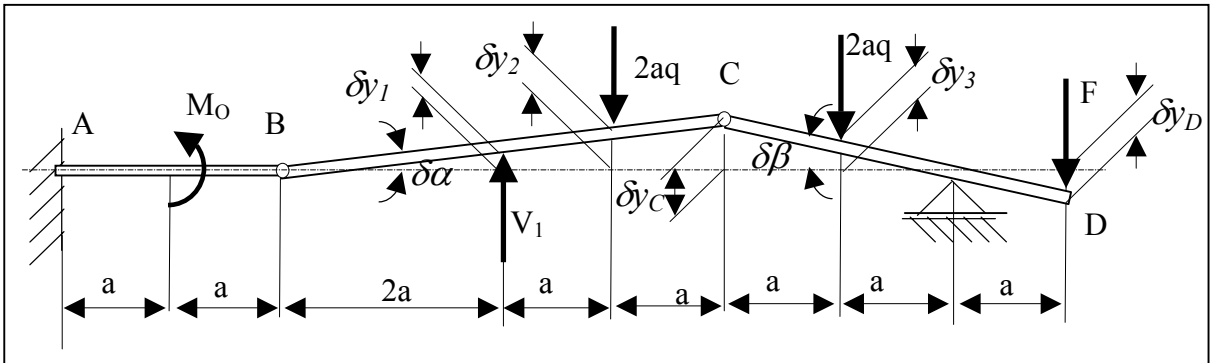


Fig.14.1.3. c

deci relația (f) devine: $\delta L = \left(V_1 - 2aq \cdot \frac{3}{2} - 2aq + F \right) \cdot \delta y_1 = 0$

de unde rezultă $V_1 = 4qa$ (g)

d. Pentru calculul reacțiunii V_2 se suprimă legătura corespunzătoare (reazemul simplu 2) şi se aplică o deplasare virtuală δy_2 compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.d.)

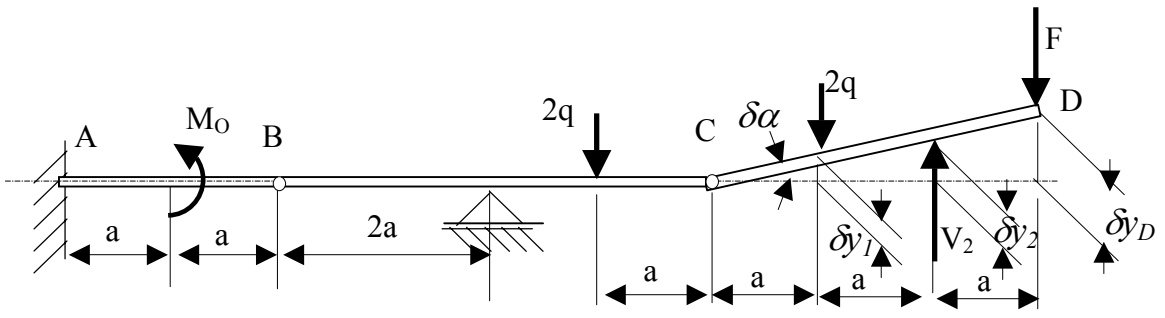


Fig.14.1.3. d

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = -2aq \cdot \delta y_1 + V_1 \cdot \delta y_2 - F \cdot \delta y_D = 0 \qquad \text{(h)}$$

Din fig. 14.1.3.d se observă că între cele trei deplasări virtuale există relațiile: $tg\delta\alpha = \frac{\delta y_1}{a} = \frac{\delta y_2}{2a} = \frac{\delta y_D}{3a} \cong \delta\alpha$, deci relația (h) devine:

$\delta L = \left(-2qa \cdot \frac{1}{2} + V_1 - F \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \delta y_2 = 0$ de unde rezultă: $V_A = \frac{5}{2} qa$ (i)

14.1.4. ***Se consideră*** *sistemul de bare articulate şi rezemate simplu, asupra căruia acționează trei forțe concentrate ca în fig. 14.1.4 (se neglijează frecarea din articulații). Se dau: AC=7a, CE=8a.* ***Se cer*** *reacțiunile: V_A, H_A, V_B şi V_D folosind principiul lucrului mecanic virtual.*

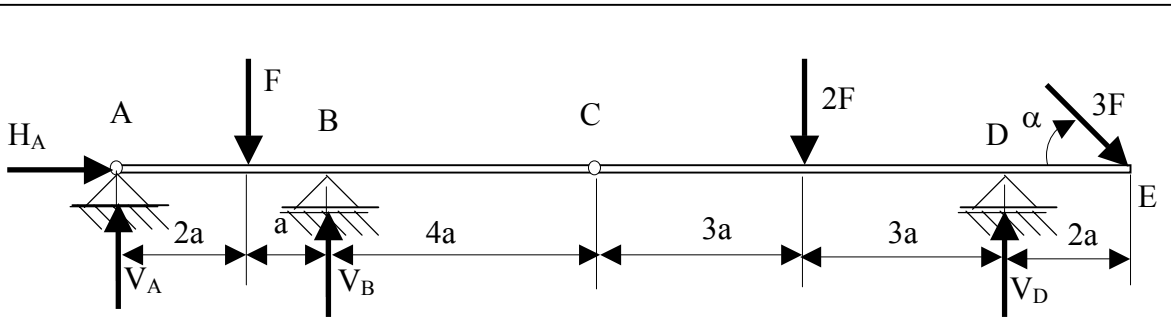


Fig.14.1.4

Rezolvare

Se suprimă legătura corespunzătoare, se introduce reacțiunea necunoscută şi se aplică apoi sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu celelalte legături, în funcție de care se exprimă lucrul mecanic al celorlalte forțe (care conform principiului lucrului mecanic virtual tebuie să fie nul).

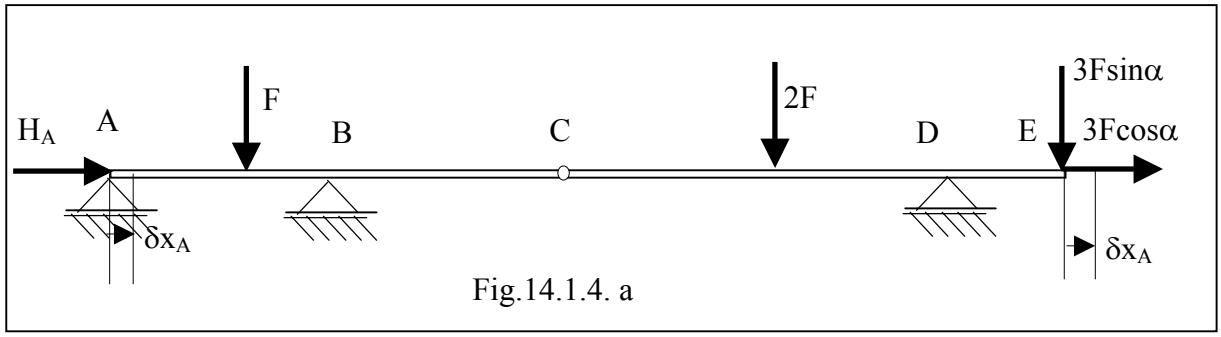


Fig.14.1.4. a

a. Pentru a determina reacțiunea H_A se suprimă legătura corespunzătoare din A (din articulație devine reazem) şi se aplică sistemului o deplasare virtuală δx_A compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.a) Lucrul mecanic al forțelor cu deplasarea vitualăδx_A se scrie:

$$\delta L = \left(H_A + 3F\cos\alpha\right)\cdot \delta x_A = 0$$
$$\Rightarrow H_A = -3F\cos\alpha \qquad \text{(a)}$$

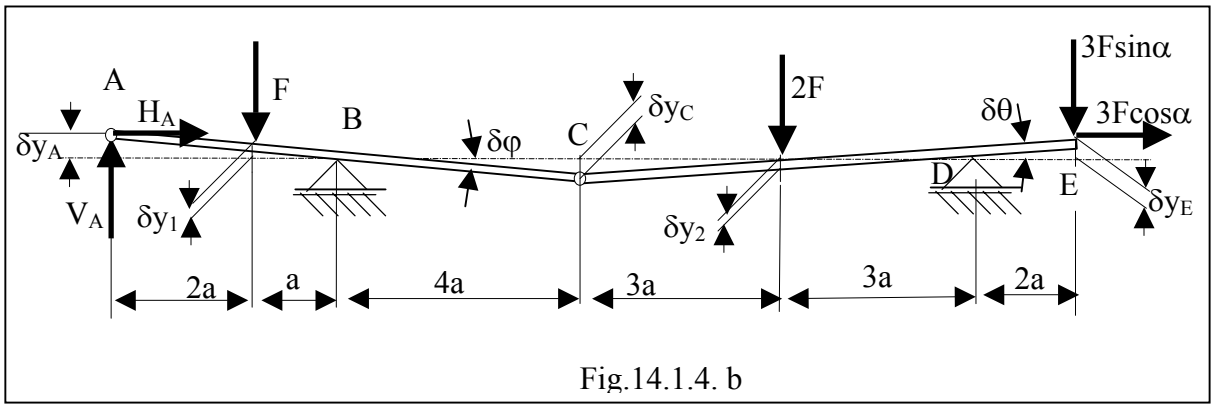


Fig.14.1.4. b

b. Pentru a determina reacțiunea V_A se suprimă complet legătura corespunzătoare din A şi se aplică sistemului o deplasare virtuală δy_A compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.b) Lucrul mecanic virtual al forțelor cu deplasările vituale corespunzătoare se scrie:

$$\delta L = V_A\cdot\delta y_A - F\cdot\delta y_1 + 2F\cdot\delta y_2 - 3F\sin\alpha\cdot\delta y_E = 0 \qquad \text{(b)}$$

Din fig. 14.1.4.b se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile: $tg\delta\varphi = \dfrac{\delta y_A}{3a} = \dfrac{\delta y_1}{a} = \dfrac{\delta y_C}{4a} \cong \delta\varphi$; $tg\delta\theta = \dfrac{\delta y_2}{3a} = \dfrac{\delta y_E}{2a} = \dfrac{\delta y_C}{6a} \cong \delta\theta$,

deci relația (b) devine:

$$\delta L = \left(V_A - F\cdot\frac{1}{3} + 2F\cdot\frac{2}{3} - 3F\sin\alpha\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot\delta y_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{4\sin\alpha - 3}{3}F \qquad \text{(c)}$$

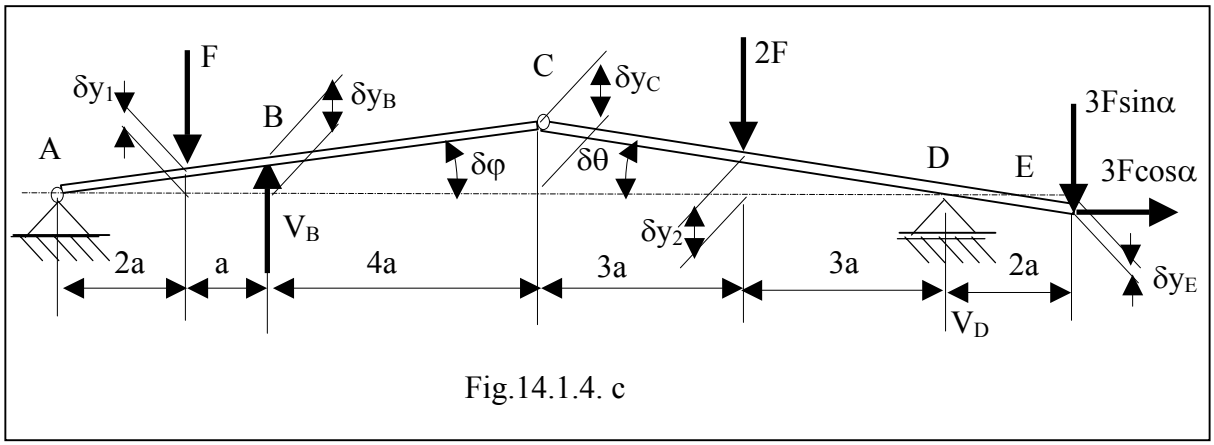


Fig.14.1.4. c

c. Pentru a determina reacţiunea V_B se suprimă complet legătura corespunzătoare din B şi se aplică sistemului o deplasare virtuală δy_B compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.c) Lucrul mecanic virtual al forţelor cu deplasările vituale corespunzătoare se scrie:

$$\delta L = V_B \cdot \delta y_B - F \cdot \delta y_1 - 2F \cdot \delta y_2 + 3F \sin\alpha \cdot \delta y_E = 0 \qquad \text{(d)}$$

Din fig. 14.4.c se observă că între cele patru deplasări virtuale există relaţiile:

$$tg\delta\varphi = \frac{\delta y_B}{3a} = \frac{\delta y_1}{2a} = \frac{\delta y_C}{7a} \cong \delta\varphi; \quad tg\delta\theta = \frac{\delta y_2}{3a} = \frac{\delta y_E}{2a} = \frac{\delta y_C}{6a} \cong \delta\theta,$$

deci relaţia (d) devine:

$$\delta L = \left(V_B - F \cdot \frac{2}{3} - 2F \cdot \frac{7}{6} + 3F \sin\alpha \cdot \frac{7}{9} \right) \cdot \delta y_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{9 - 7\sin\alpha}{3} F \qquad \text{(e)}$$

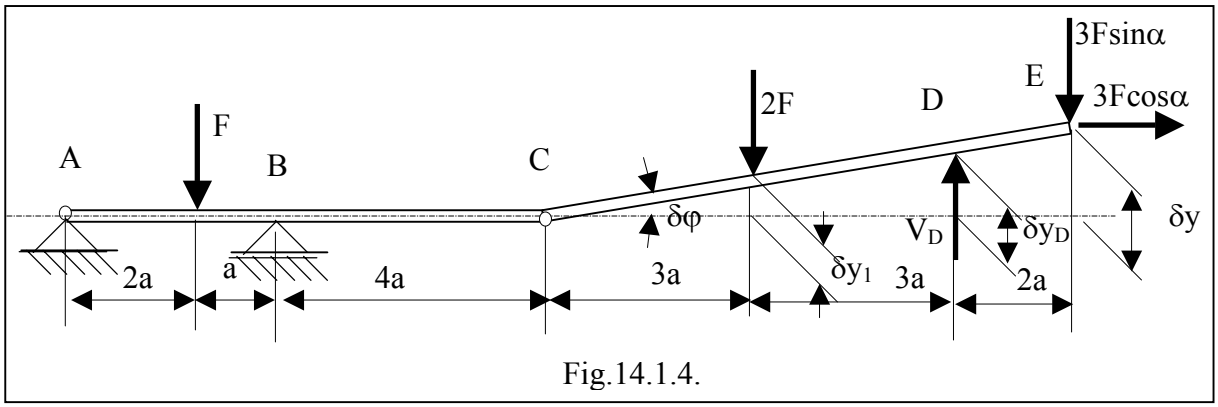


Fig.14.1.4.

d. Pentru a determina reacţiunea V_D se suprimă complet legătura corespunzătoare din D şi se aplică sistemului o deplasare virtuală δy_D compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.d) Lucrul mecanic virtual al forţelor cu deplasările vituale corespunzătoare se scrie:

$$\delta L = V_D \cdot \delta y_D - 2F \cdot \delta y_1 - 3F \sin\alpha \cdot \delta y_E = 0 \qquad \text{(f)}$$

Din fig. 14.4.d se observă că între cele patru deplasări virtuale există relaţiile:

$$tg\delta\varphi = \frac{\delta y_1}{3a} = \frac{\delta y_D}{6a} = \frac{\delta y_E}{8a} \cong \delta\varphi; \quad , \qquad \text{deci relaţia (f) devine:}$$

$$\delta L = \left(V_D - 2F \cdot \frac{3}{6} - 3F \sin\alpha \cdot \frac{8}{6} \right) \cdot \delta y_D = 0 \quad \Rightarrow V_D = (1 + 4\sin\alpha) F \qquad \text{(g)}$$

14.1.5. ***Se consideră*** *sistemul format dintr-un troliu de raze R şi r, de greutate G_3 pe circumferinţele troliului fiind înfăşurate două fire inextensibile de care sunt prinse două greutăţi G_1 şi G_2 (fig. 14.1.5). Presupunem că troliul este omogen de rază R şi că se neglijează frecările. Sistemul este lăsat liber plecând din repaus .* ***Se cere*** *legea de mişcare a sistemului şi tensiunile din cele două fire folosind principiile lucrului mecanic virtual şi al lui D'Alembert.*

Rezolvare

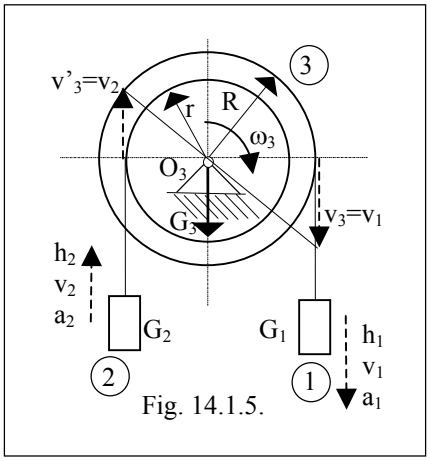


Fig. 14.1.5.

Acestă problemă a fost rezolvată la capitolul anterior folosind teoremele generale ale dinamicii: teorema de variaţie a energiei cinetice şi teoremele impulsului şi momentului cinetic.

Aici se vor folosi *principiul lucrului mecanic virtual* pentru determinarea mişcării şi *principiul lui D'Alembert* pentru determinarea tensiunilor din fire.

Se face o analiză cinematică a mişcării celor două corpuri ale sistemului (2 şi 3) în funcţie de mişcarea corpului 1, conform tabelului de mai jos.

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Acceleraţia	Deplasarea virtuală
(1) Translaţie	h_1	v_1	a_1	δh_1
(2) Translaţie	$h_2 = \frac{rh_1}{R}$	$v_2 = \frac{rv_1}{R}$	$a_2 = \frac{ra_1}{R}$	$\delta h_2 = \frac{r\delta h_1}{R}$
(3) Rotaţie	$\varphi_3 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forţelor (direct aplicate, de legătură şi de inerţie) pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul: $\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0$ (a)

unde (vezi şi figurile 14.1.5.a,b,c):

$$\delta L_1 = (G_1 - F_{I1})\cdot\delta h_1; \quad \delta L_2 = (-G_2 - F_{I2})\cdot\delta h_2; \quad \delta L_3 = -M_{I3}\cdot\delta\varphi_3 \qquad \text{(b)}$$

Forţele şi cuplurile de inerţie au modulele (fig. 14.5.b):

$$F_{I1} = \frac{G_1}{g}a_1; \quad F_{I2} = \frac{G_2}{g}a_2 = \frac{G_2}{g}\frac{r}{R}a_1; \; M_{I3} = J_3\varepsilon_3 = \frac{G_3R^2}{2g}\varepsilon_3 = \frac{G_3R}{2g}a_1 \qquad \text{(c)}$$

S-a considerat că discul 3 este omogen de rază R şi masă G_3/g atunci momentul de inerţie se scrie: $J_3 = \frac{G_3R^2}{2g}$.

Cu aceste precizări relaţia (a) se scrie:

$$\delta L = (G_1 - F_{I1}) \cdot \delta h_1 + (-G_2 - F_{I2}) \cdot \delta h_2 - M_{I3} \cdot \delta\varphi_3 = 0 \qquad \textit{sau :}$$

$$\delta L = \left(G_1 - \frac{G_1}{g} a_1 \right) \cdot \delta h_1 + \left(-G_2 - \frac{G_2}{g} \frac{r}{R} a_1 \right) \frac{r}{R} \cdot \delta h_1 - \frac{G_3 R}{2g} a_1 \cdot \frac{\delta h_1}{R} = 0$$

Rezultă : $\delta L = \left[\left(G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right) - \left(\frac{G_1}{g} + \frac{G_2}{g} \frac{r^2}{R^2} + \frac{G_3}{2g} \right) \cdot a_1 \right] \cdot \delta h_1 = 0$ (d)

Se obține accelerația: $a_1 = \dfrac{\left(G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right)}{\left(G_1 + \frac{r^2}{R^2} G_2 + \frac{G_3}{2} \right)} g$ (e)

Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp şi se introduc atât forțele direct aplicate şi de legătură, cât şi forțele/cuplurile de inerție şi se scriu ecuațiile de *"echilibru dinamic":* $\sum \left(\overline{F}^a + \overline{F}^{leg} + \overline{F}_I \right) = 0;$ $\sum \left(\overline{M}^a + \overline{M}^{leg} + \overline{M}_I \right) = 0;$ (această metodă se mai numeşte *metoda cinetostatică).*

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.5.a):

$$\begin{cases} -G_1 + S_1 + F_{I1} = 0 \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

unde F_{I1} are expresia dată de (c). Înlocuind se obține:

$$S_1 = G_1 \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) \qquad \text{(g)}$$

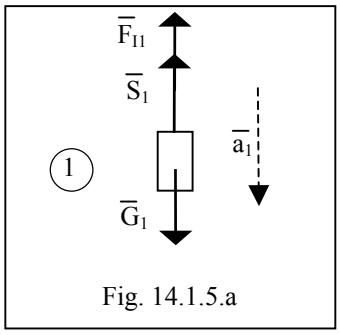


Fig. 14.1.5.a

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.5.b):

$$\begin{cases} -G_2 + S_2 - F_{I2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(h)}$$

unde F_{I2} are expresia dată de (c). Înlocuind se obține:

$$S_2 = G_2 \left(1 + \frac{r}{R} \frac{a_1}{g} \right) \qquad \text{(i)}$$

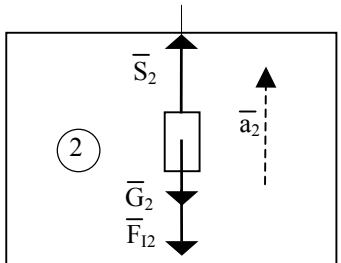


Fig. 14.1.5.b

c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.5.c):

$$\begin{cases} 0 = H_3 \\ 0 = V_3 - G_3 - S_1 - S_2 \\ S_1 \cdot R - S_2 \cdot r - M_{I3} = 0 \end{cases} \qquad \text{(j)}$$

unde M_{I2} are expresia dată de (c)

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$V_3 = G_1 \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) + G_2 \left(1 + \frac{a_1}{g} \frac{r}{R} \right) + G_3 \qquad \text{(k)}$$

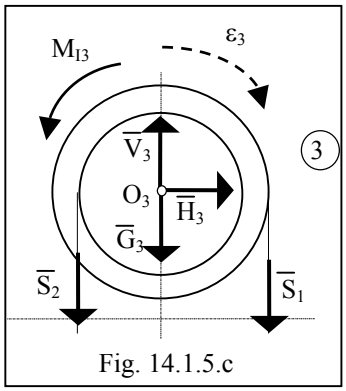


Fig. 14.1.5.c

Observaţie:

Ultima relaţie (j) este o relaţie de verificare, întrucât în aceasta toate mărimile sunt cunoscute. Dacă nu se aplică principiul lucrului mecanic virtual, atunci relaţiile obţinute prin separarea corpurilor şi aplicarea principiului lui D'Alembert sunt suficiente pentru determinarea mişcării şi a forţelor de legătură ale sistemului.

14.1.6. ***Se consideră*** *sistemul de corpuri din figură unde mărimile R, G, α, sunt cunoscute. Corpul (1) coboară pe planul înclinat (se neglijează frecarea de alunecare), având parametrii cinematicii: h_1, v_1, a_1; corpul (2) este antrenat prin intermediul unui fir într-o mişcare de rotaţie (fără frecare în lagărul O_2), iar corpul (3) se deplazează într-o mişcare plan-paralelă (fig. 14.1.6)* ***Se cere:***

1) Accleleratia sistemului aplicând principiul lucrului mecanic virtual;

2) Să se determine forţele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert

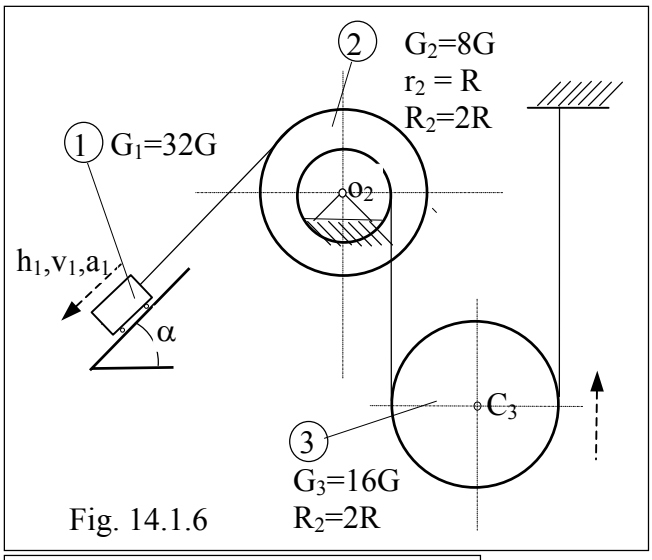


Fig. 14.1.6

Rezolvare

1. Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mişcării, adică exprimarea parametriilor cinematici ai corpurilor (2) şi (3) în funcţie de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relaţiile de lanţ cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări şi acceleraţii se ţine seama de relaţiile diferenţiale dintre ele (fig. 14.1.6.a)

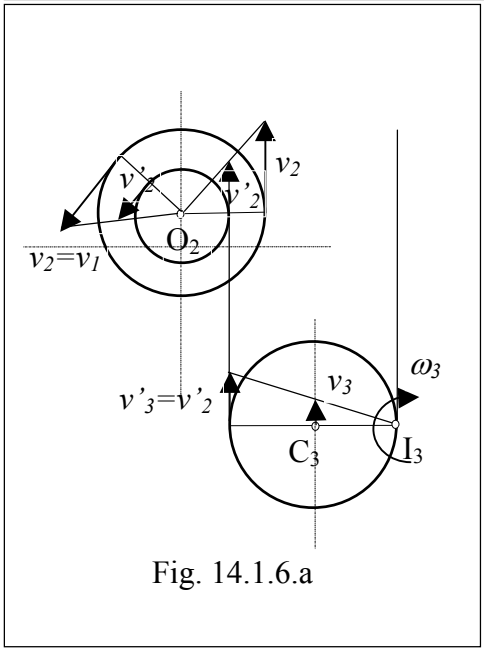


Fig. 14.1.6.a

Pentru corpul 1 şi 2:

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_2'}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{2R} = \frac{v_2'}{R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{v_1}{2R} \\ v_2' = \dfrac{v_1}{2} \end{cases} \quad \text{(a)}$$

$$v_2 = v_1$$

Pentru corpul 3

$$\omega_3 = \frac{v_3'}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_1}{8R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = \dfrac{v_1}{4} \\ \omega_3 = \dfrac{v_1}{8R} \end{cases} \text{(b)}$$

$$v_3' = v_2' = \frac{v_1}{2}$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Acceleraţia	Deplasarea virtuală
(1) Translaţie	h_1	v_1	a_1	δh_1
(2) Rotaţie	$\varphi_2 = \frac{h_1}{2R}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_2 = \frac{\delta h_1}{2R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = \frac{h_1}{4}$	$v_3 = \frac{v_1}{4}$	$a_3 = \frac{a_1}{4}$	$\delta h_3 = \frac{\delta h_1}{4}$
	$\varphi_3 = \frac{h_1}{8R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{8R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{8R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{8R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forţelor: direct aplicate, de legătură şi de inerţie pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0 \qquad (c)$$

unde:

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= \left(G_1 \sin\alpha - F_{I1}\right)\cdot \delta h_1 \\ \delta L_2 &= -M_{I2}\cdot \delta\varphi_2 \\ \delta L_3 &= \left(-G_3 - F_{I3}\right)\cdot \delta h_3 - M_{I3}\cdot \delta\varphi_3 \end{aligned} \qquad (d)$$

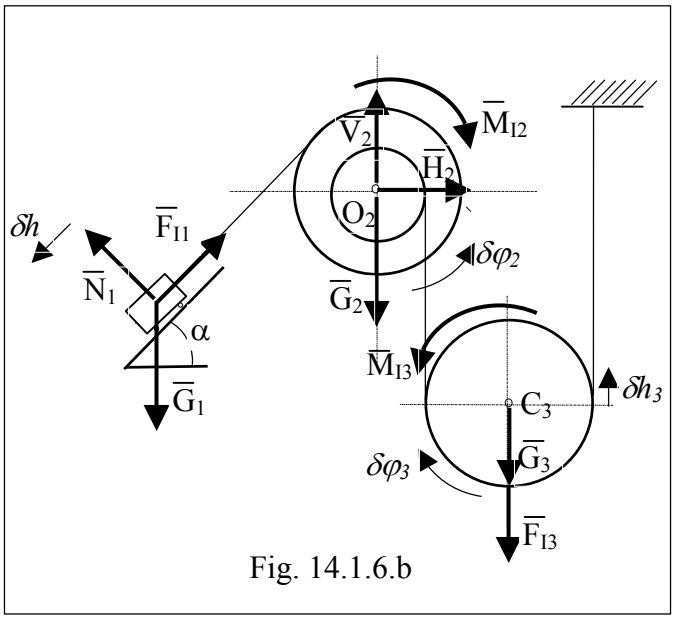


Fig. 14.1.6.b

Forţele şi cuplurile de inerţie au modulele (fig. 14.1.6.b):

$$\begin{aligned} F_{I1} &= \frac{G_1}{g}a_1 = \frac{32G}{g}a_1 \\ M_{I2} &= J_2\varepsilon_2 = \frac{G_2R_2^2}{2g}\varepsilon_2 = \frac{8GR}{g}a_1 \\ F_{I3} &= \frac{G_3}{g}a_3 = \frac{4G}{g}a_1 \\ M_{I3} &= J_3\varepsilon_3 = \frac{G_3R_3^2}{2g}\varepsilon_3 = \frac{4GR}{g}a_1 \end{aligned} \qquad (e)$$

Dacă se exprimă şi deplasările virtuale $\delta\varphi_2$, δh_3, $\delta\varphi_3$ în funcţie de δh_1 expresia (c) devine:

$$\delta L = \left(G_1 \sin\alpha - F_{I1}\right)\cdot \delta h_1 - M_{I2}\cdot \delta\varphi_2 + \left(-G_3 - F_{I3}\right)\cdot \delta h_3 - M_{I3}\cdot \delta\varphi_3 = 0$$

$$\delta L = \left[G_1 \sin\alpha - F_{I1} - M_{I2}\cdot\frac{1}{2R} + \left(-G_3 - F_{I3}\right)\cdot\frac{1}{4} - M_{I3}\cdot\frac{1}{8R}\right]\cdot \delta h_1 = 0 \qquad (f)$$

Înlocuind în (f) valorile forţelor/cuplurilor de inerţie date de relaţiile (e) şi valorile deplasărilor viruale din tabel se obţine:

$$\left[4(8\sin\alpha-1)-\frac{75}{2g}a_1\right]\cdot\delta h_1=0$$
$$\Rightarrow a_1=\frac{8(8\sin\alpha-1)}{75}g \qquad \text{(g)}$$

2. Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp şi se introduc atât forțele direct aplicate şi de legătură, cât şi forțele/cuplurile de inerție şi se scriu ecuațiile de *"echilibru dinamic":* $\sum\left(\overline{F}^a+\overline{F}^{leg}+\overline{F}_I\right)=0;\ \ \sum\left(\overline{M}^a+\overline{M}^{leg}+\overline{M}_I\right)=0;$ Această metodă se mai numeşte *metoda cinetostatică.*

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.6.c):

$$\begin{cases}-G_1\sin\alpha+S_1+F_{I1}=0\\ -G_1\cos\alpha+N_1=0\end{cases} \qquad \text{(g)}$$

unde F_{I1} are expresia dată de (e)

Înlocuind valorile se obține:

$$S_1=\frac{32G}{75}(11\sin\alpha+8) \qquad \text{(h)}$$
$$N_1=32G\cos\alpha$$

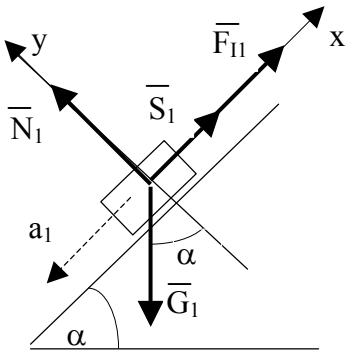


Fig.14.1.6.c

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.6.d):

$$\begin{cases}0=H_2-S_1\cos\alpha\\ 0=V_2-S_1\sin\alpha-G_2-S_2\\ S_1\cdot 2R-S_2\cdot R-M_{I2}=0\end{cases} \qquad \text{(i)}$$

unde M_{I2} are expresia dată de (e)

Făcând înlocuirile rezultă:

$$S_2=\frac{64G}{75}(3\sin\alpha+9) \qquad \text{(j)}$$
$$H_2=S_1\cos\alpha;\ \ V_2=S_1\sin\alpha+G_2+S_2$$

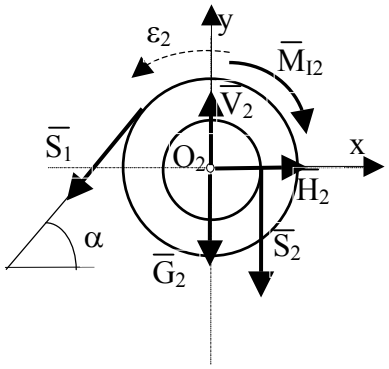


Fig. 14.1.6.d

c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.6.e):

$$\begin{cases}S_2+S_3-G_3-F_{I3}=0\\ S_2\cdot 2R-S_3\cdot 2R-M_{I3}=0\end{cases} \qquad \text{(k)}$$

unde F_{I3} şi M_{I3} au expresiile date de (e)

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$S_3=\frac{16(4\sin\alpha+37)G}{75} \qquad \text{(l)}$$

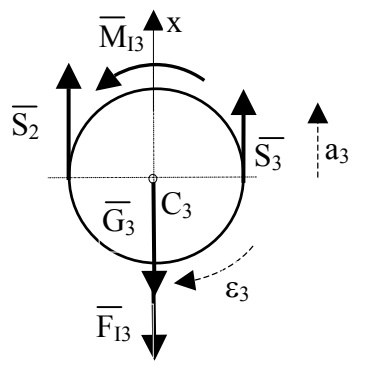


Fig. 14.1.6.e

14.1.7. ***Se consideră*** *sistemul de corpuri din figură unde mărimile R, G, α, sunt cunoscute. Roata (3) coboară pe planul înclinat, rostogolindu-se fără alunecare roata (2) este antrenată într-o mişcare de rotaţie (fără frecare în O_2), iar corpul (1) se deplazează în sus având parametrii cinematicii: h_1, v_1, a_1; (fig. 14.1.7) .* ***Se cere să se determine***

1) acceleraţia sistemului aplicând principiul lucrului mecanic virtual;

2) forţele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert

3) valoarea minimă a coeficientului de fecare ca corpul (3) să nu alunece.

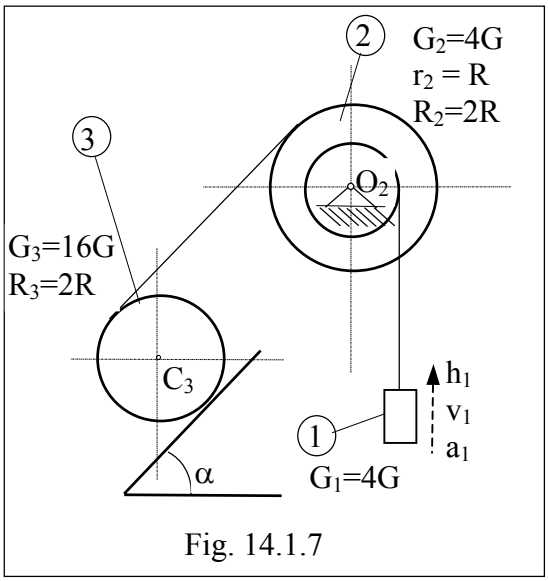


Fig. 14.1.7

Rezolvare

1) Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mişcării, sau exprimarea parametriilor cinematici ai corpurilor (2) şi (3) în funcţie de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relaţiile de lanţ cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări şi acceleraţii se ţine seama de relaţiile diferenţiale dintre ele (fig. 14.1.7.a)

Pentru corpul 1 şi 2:

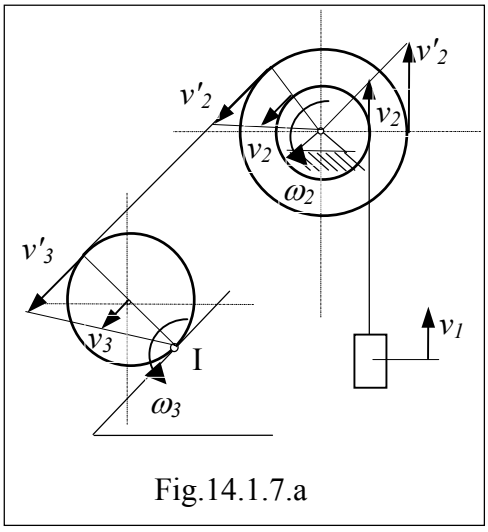


Fig.14.1.7.a

$$\omega_2 = \frac{v_2'}{R_2} = \frac{v_2}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{v_2'}{2R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{v_1}{R} \\ v_2' = 2v_1 \end{cases}$$

$$v_2' = v_3'$$

Pentru corpul 3

$$\omega_3 = \frac{v_3'}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_3'}{4R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ \omega_3 = \dfrac{v_1}{2R} \end{cases} \text{(a)}$$

$$v_3' = v_2' = 2v_1$$

Rezultatele analizei cinematice :

Corpul şi tipul mişcării	Deplasarea	Viteza	Acceleraţia	Deplasarea virtuală
(1) Translaţie	h_1	v_1	a_1	δh_1
(2) Rotaţie	$\varphi_2 = \dfrac{h_1}{R}$	$\omega_2 = \dfrac{v_1}{R}$	$\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta h_1}{R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = h_1$	$v_3 = v_1$	$a_3 = a_1$	$\delta h_3 = \delta h_1$
	$\varphi_3 = \dfrac{h_1}{2R}$	$\omega_3 = \dfrac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta h_1}{2R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forțelor (direct aplicate, de legătură şi de inerție) pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0 \tag{b}$$

unde:

$$\begin{aligned} &\delta L_1 = \left(-G_1 - F_{I1}\right)\cdot \delta h_1; \qquad \delta L_2 = -M_{I2}\cdot \delta\varphi_2 \\ &\delta L_3 = \left(-G_3 \sin\alpha - F_{I3}\right)\cdot \delta h_3 + \left(-M_{I3} - M_{r3}\right)\cdot \delta\varphi_3 \end{aligned} \tag{c}$$

Forțele şi cuplurile de inerție au modulele:

$$F_{I1} = \frac{G_1}{g}a_1 = \frac{4G}{g}a_1$$

$$M_{I2} = J_2\varepsilon_2 = \frac{G_2R_2^2}{2g}\varepsilon_2 = \frac{8GR}{g}a_1$$

$$F_{I3} = \frac{G_3}{g}a_3 = \frac{16G}{g}a_1$$

$$M_{I3} = J_3\varepsilon_3 = \frac{G_3R_3^2}{2g}\varepsilon_3 = \frac{16GR}{g}a_1 \tag{d}$$

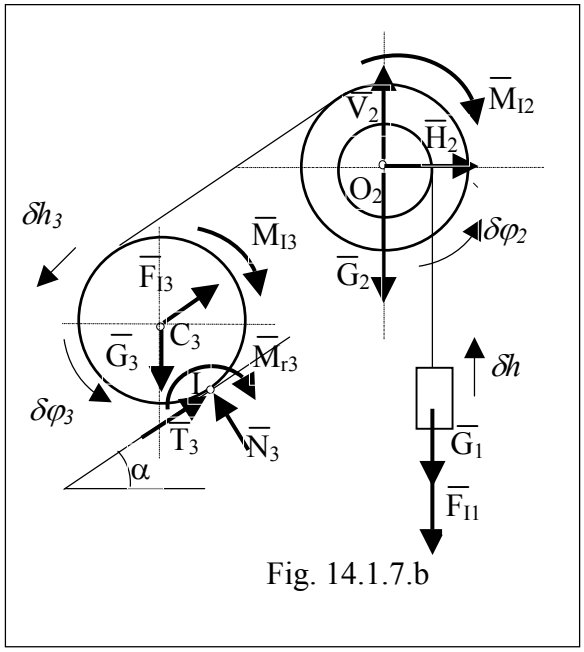


Fig. 14.1.7.b

Dacă se exprimă şi deplasările virtuale $\delta\varphi_2$, δh_3, $\delta\varphi_3$ în funcție de δh_1 expresia (b) devine:

$$\delta L = \left(G_1 - F_{I1}\right)\cdot \delta h_1 - M_{I2}\cdot \delta\varphi_2 + \left(-G_3 \sin\alpha - F_{I3}\right)\cdot \delta h_3 - \left(M_{I3} + M_{r3}\right)\cdot \delta\varphi_3 = 0$$

$$\delta L = \left[G_1 - F_{I1} + M_{I2}\cdot\frac{1}{R} + \left(-G_3 \sin\alpha - F_{I3}\right) - \left(M_{I3} + M_{r3}\right)\cdot\frac{1}{2R}\right]\cdot \delta h_1 = 0 \tag{b'}$$

Înlocuind în (d) valorile forțelor/cuplurilor de inerție date de relațiile (d) se obține:

$$\left[4\sin\alpha - \frac{2s}{R}\cos\alpha - 1 - \frac{9a_1}{g}\right]\cdot \delta h_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\left(4\sin\alpha - \frac{2s}{R}\cos\alpha - 1\right)}{9}g \tag{e}$$

2) Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp şi se introduc atât forțele direct aplicate şi de legătură, cât şi forțele/cuplurile de inerție şi se scriu ecuațiile de *"echilibru dinamic"*: $\sum\left(\overline{F}^{\,a} + \overline{F}^{\,leg} + \overline{F}_I\right) = 0;\ \ \sum\left(\overline{M}^{\,a} + \overline{M}^{\,leg} + \overline{M}_I\right) = 0;$

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.7.c):

$$-G_1 + S_1 - F_{I1} = 0 \qquad \text{(f)}$$

unde F_{I1} are expresia (d). Înlocuind se obține:

$$S_1 = \frac{8G}{9}\left(4 + 2\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha\right) \qquad \text{(g)}$$

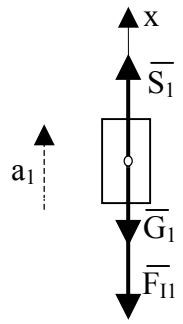


Fig. 14.1.7.c

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.7.d):

$$\begin{cases} 0 = H_2 - S_2\cos\alpha \\ 0 = V_2 - S_2\sin\alpha - G_2 - S_1 \\ S_2 \cdot 2R - S_1 \cdot R - M_{I2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(h)}$$

unde M_{I2} are expresia (d)

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$S_2 = \frac{4G}{3}\left(2\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right) \qquad \text{(i)}$$

$$H_2 = S_2\cos\alpha;\ V_2 = S_2\sin\alpha + G_2 + S_1$$

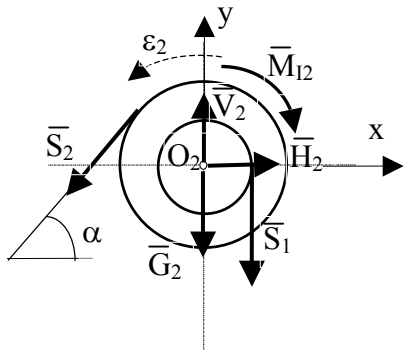


Fig. 14.1.7.d

c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.7.e):

$$\begin{cases} -S_2 - T_3 + G_3\sin\alpha - F_{I3} = 0 \\ N_3 - G_3\cos\alpha = 0 \\ -S_2 \cdot 2R + T_3 \cdot 2R - M_{I3} - M_{r3} = 0 \end{cases} \qquad \text{(j)}$$

$$M_{r3} = sN;\quad T \le \mu N_3 \qquad \text{(k)}$$

unde F_{I3} şi M_{I3} au expresiile (d)

Făcând înlocuirile şi calculele se obține:

$$N_3 = 16G\cos\alpha$$

$$T_3 = \frac{4G}{9}\left(14\sin\alpha + 11\frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right)$$

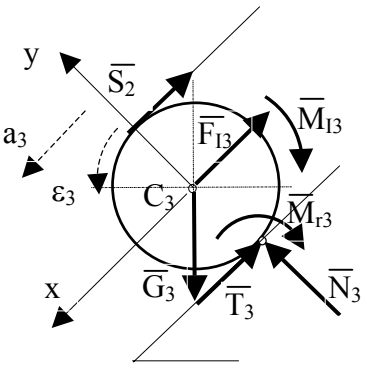


Fig. 14.1.7.e

Ultima ecuație din cele trei ecuații (k) este pentru verificare.

3) Din condiția $\mu \ge \frac{T_3}{N_3} \quad \Rightarrow \quad \mu_{min} = \frac{T_3}{N_3} = \frac{1}{36\cos\alpha}\left(14\sin\alpha + 11\frac{s}{R}\cos\alpha + 1\right)$ (l)

14.1.8. ***Se consideră*** *sistemul din figură format din două corpuri: o prismă de greutate G_1 şi unghiul α şi un corp de greutate G_2, care alunecă liber pe prismă. Se neglijază frecarea dintre cele două corpuri, ca şi frecarea dintre prismă şi suprafața orizontală. (fig. 14.1.8) .* ***Se cere*** *să se determine acceleraţiile celor două corpuri precum şi forțele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert .*

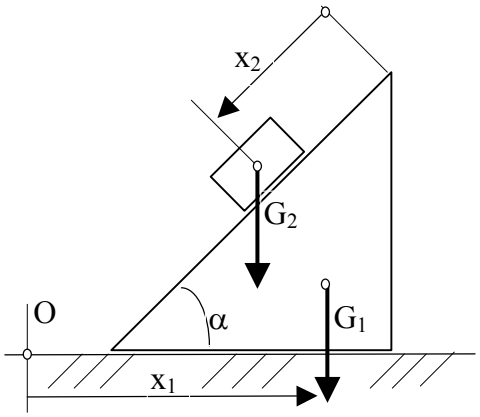


Fig. 14.1.8

Rezolvare

Problema având două grade de libertate, se pot alege doi parametrii independenți x_1 şi x_2, cu ajutorul cărora se determină poziția sistemului la un moment dat. Acceleraţiile sunt: $a_1 = \ddot{x}_1;\ a_2 = \ddot{x}_2$, iar cele două corpuri efectuează mişcări de translație.

Se introduc forțele de inerție ce acționează asupra celor două corpuri în centrele lor de masă, având mărimile:

$$F'_{I1} = \frac{G_1}{g}a_1;\ F'_{I2} = \frac{G_2}{g}a_1;\ F''_{I2} = \frac{G_2}{g}a_2 \quad \text{(a)}$$

şi sensurile date în fig. 14.1.8.a,b (opuse acceleraţiilor).

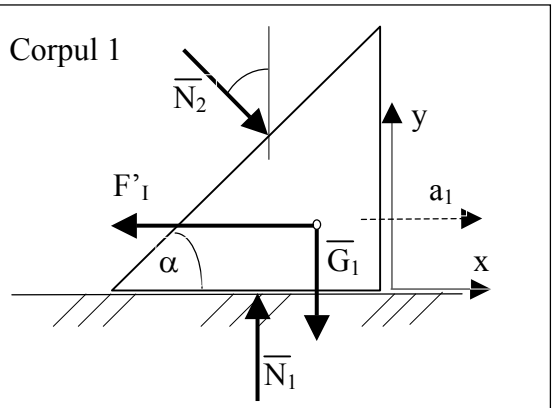


Fig. 14.1.8.a

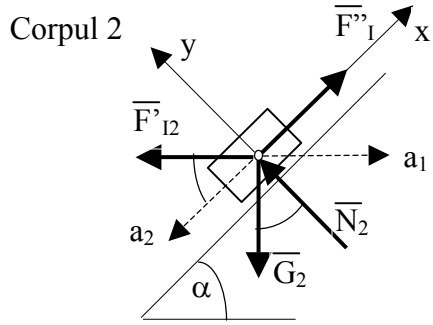


Fig. 14.1.8.b

Pentru corpul 2 acceleraţia a_1 are rol de acceleraţie de transport, iar a_2 de acceleraţie relativă; astfel se justifică expresiile forţelor de inerţie F'_{I2} *si* F''_{I2}.

Aplicând principiul lui d'Alembert, se scriu ecuaţiile de echilibru cinetostatic. Se observă că sunt suficiente doar ecuaţiile de proiecţii, obţinându-se respectiv:

Pentru corpul 1:
$$\begin{cases} N_2 \sin\alpha - \dfrac{G_1}{g}a_1 = 0 \\ N_1 - G_1 - N_2 \cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{(b)}$$

Pentru corpul 2:
$$\begin{cases} \dfrac{G_2}{g}a_2 - \dfrac{G_2}{g}a_1 \cos\alpha - G_2 \sin\alpha = 0 \\ N_2 - G_2 \cos\alpha - \dfrac{G_2}{g}a_1 \sin\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{(c)}$$

Se obţine:
$$a_1 = \frac{G_2 \sin 2\alpha}{2\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)}g;\quad a_2 = \frac{\left(G_1 + G_2\right)\sin\alpha}{\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)}g;$$
$$N_2 = \frac{G_1 G_2 \cos\alpha}{\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)};\quad N_1 = G_1 + \frac{G_1 G_2 \cos^2\alpha}{\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)}; \quad \text{(d)}$$

14.2. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

PROBLEME REZOLVATE

14.2.1. Se consideră *sistemul din figură format din două corpuri: o prismă de greutate G_1 şi unghiul α şi un corp de greutate G_2, care se deplasează pe prismă. Se neglijază frecarea dintre cele două corpuri, ca şi frecarea dintre prismă şi suprafaţa orizontală. (fig. 14.2.1.a) .* ***Se cere*** *să se determine legea de mişcare a sistemului, folosind ecuaţiile lui Lagrange.*

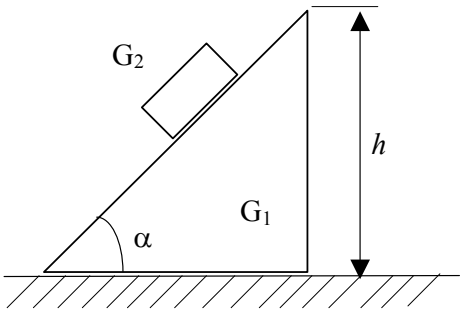


Fig. 14.2.1.a

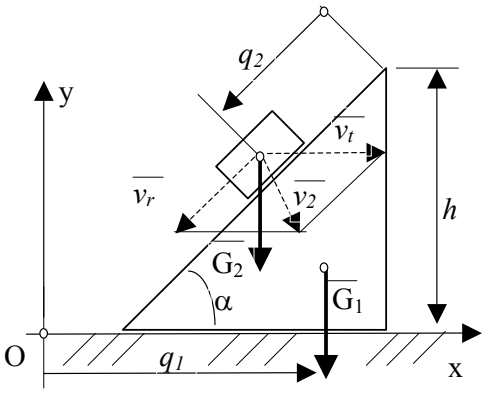


Fig. 14.2.1.b

Rezolvare

Problema având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii liniari q_1 şi q_2, cu ajutorul cărora se determină poziția sistemului la un moment dat. Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{G_1}{2g}\dot{q}_1^2 + \frac{G_2}{2g}v_2^2 \qquad \text{(a)}$$

unde cu v_2 am notat viteza absolută a corpului de greutate G_2.

Pentru determinarea vitezei v_2 se pot folosi două metode:

a. Metoda analitică

Se notează cu (x_2, y_2) coordonatele centrului de greutate al corpului 2 în raport cu sistemul Oxy ales (fig. 14.2.1.b). Se poate scrie relația vitezelor astfel:

$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$

unde :

$$\begin{cases} x_2 = q_1 - q_2 \cos\alpha \\ y_2 = h - q_2 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos\alpha \\ \dot{y}_2 = -\dot{q}_2 \sin\alpha \end{cases}$$

Prin urmare: $v_2^2 = (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos\alpha)^2 + (\dot{q}_2 \sin\alpha)^2 = \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos\alpha + \dot{q}_2^2$ (b)

b. Metoda grafo-analitică

Din fig. 14.2.1.b se poate observa că viteza corpului 2 se obține prin compunerea vectorială a celor două viteze: $\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_t$. Prin urmare avem:

$$v_2^2 = v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha) = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos\alpha \qquad (b')$$

deci s-a obținut aceaşi expresia pentru viteza corpului 2.

Prin urmare energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = \frac{G_1}{2g}\dot{q}_1^2 + \frac{G_2}{2g}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos\alpha\right) \qquad (c)$$

Derivatele parțiale din ecuațiile lui Lagrange se scriu:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \qquad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0;$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{G_1 + G_2}{g}\dot{q}_1 - \frac{G_2}{g}\dot{q}_2 \cos\alpha; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{G_2}{g}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \cos\alpha\right); \qquad (d)$$

Calculul forțelor generalizate Q_1 şi Q_2 se poate face în două moduri:

a. cu ajutorul lucrului mecanic virtual, considerând pe rând parametrii q_1 şi q_2 variabili:

$$(\delta L)_{q_1\, var} = 0; \ (\delta L)_{q_2\, var} = G_2 \delta q_2 \sin\alpha;$$
$$\Rightarrow Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1\, var}}{\delta q_1} = 0 \ ; \ Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2\, var}}{\delta q_2} = G_2 \sin\alpha \qquad (e)$$

b. cu ajutorul funcției de forță, care în acest caz are forma:

$$U = \sum_{i=1}^{2} m_k g y_k = -G_1 \frac{h}{3} - G_2\left(h - q_2 \sin\alpha\right)$$

unde s-a ținut seama de sensul forțelor față de axele sistemului Oxy. Deci:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0; \ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = G_2 \sin\alpha \qquad (e')$$

Ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1 \ ; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2$$

conduc la sietmul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{G_1 + G_2}{g}\ddot{q}_1 - \dfrac{G_2}{g}\ddot{q}_2 \cos\alpha = 0 \\ \dfrac{G_2}{g}\left(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \cos\alpha\right) = G_2 \sin\alpha \end{cases} \qquad (f)$$

Rezolvând sistemul se obține acelaşi rezultat cu cel obținut prin aplicarea principiului lui d'Alembert :

$$\ddot{q}_1 = a_1 = \frac{G_2 \sin 2\alpha}{2\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)} g; \quad \ddot{q}_2 = a_2 = \frac{(G_1 + G_2)\sin\alpha}{\left(G_1 + G_2 \sin^2\alpha\right)} g; \qquad (g)$$

14.2.2. ***Se consideră*** *sistemul din figură format din trei corpuri, aflate respectiv în mişcările de translaţie, rotaţie şi plan-paralelă , având masele m_1, m_2, m_3 şi razele R_2 şi R_3 cunoscute, ca în fig. 14.2.2. Sensul de mişcare al celor trei corpuri este indicat în figură. Se presupune că firele nu alunecă pe discuri şi se neglijează frecările din lagăre.* ***Se cere:*** *Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange (parametrii h_1, v_1, a_1),*

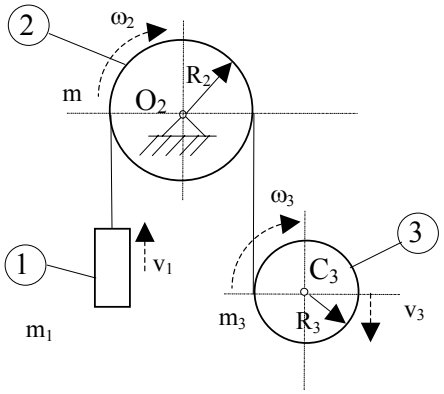


Fig. 14.2.2.a

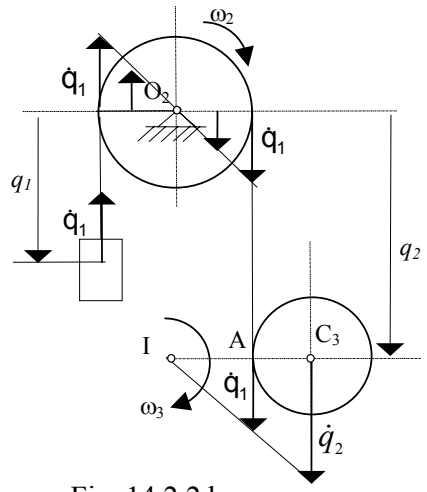


Fig. 14.2.2.b

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mişcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mişcarea cu q_1 şi q_2 (fig.14.2.2.a). Notând $AI=x$, relaţiile de lanţ cinematic pentru viteze sunt:

$$\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{R_2}; \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_1}{x} = \frac{\dot{q}_2}{R_3 + x} \tag{a}$$

De unde se obţine:

$$x = \frac{R_3 \dot{q}_1}{\dot{q}_2 - \dot{q}_1} \quad si \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_1}{R_3} \tag{b}$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{m_2}{4} \dot{q}_1^2 \\ E_3 &= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \\ E_3 &= \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4} m_3 \left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right)^2 \end{aligned} \tag{c}$$

Energia cinetică totală este:

$$E = E_1 + E_2 + E_2 = \frac{1}{4}(2m_1 + m_2 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{3}{4} m_3 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \tag{d}$$

Derivatele parţiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0 \tag{e}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}=\frac{1}{2}(2m_1+m_2+m_2)\dot{q}_1-\frac{1}{2}m_3\dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right)=\frac{1}{2}(2m_1+m_2+m_2)\ddot{q}_1-\frac{1}{2}m_3\ddot{q}_2$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}=\frac{3}{2}m_3\dot{q}_2-\frac{1}{2}m_3\dot{q}_1 \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right)=\frac{3}{2}m_3\ddot{q}_2-\frac{1}{2}m_3\ddot{q}_1 \qquad \text{(f)}$$

Forţele generalizate Q_1 şi Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (q_1 respectiv q_2) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.2.b) adică:

$$Q_1=\frac{(\delta L)_{q_1\,var}}{\delta q_1}=-m_1 g; \quad Q_2=\frac{(\delta L)_{q_2\,var}}{\delta q_2}=m_3 g \qquad \text{(g)}$$

Înlocuind în ecuaţiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_1}=Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_2}=Q_2. \qquad \text{(h)}$$

se obţine sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\begin{cases}(2m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1-m_3\ddot{q}_2=-2m_1 g\\ -m_3\ddot{q}_1+3m_2\ddot{q}_2=2m_3 g\end{cases}$$

Rezolvând acest sistem se găsesc acceleraţiile generalizate $\ddot{q}_1$ *si* $\ddot{q}_2$

Metoda a IIa

Problema poate fi rezolvată considerând drept coordonate generalizate unghiurile de rotaţie ale celor două discuri aflate în mişcare de rotaţie, respectiv plan-paralelă : θ_1 *şi* θ_2. De asemenea se modifică notaţiile: se notează cu R_1 şi m_1 discul de rază R_2 şi masă m_2, cu R_2 şi m_2 discul de rază R_3 şi masă m_3 *şi* cu m_3 corpul de masă m_1 ca în fig. 14.2.2.c

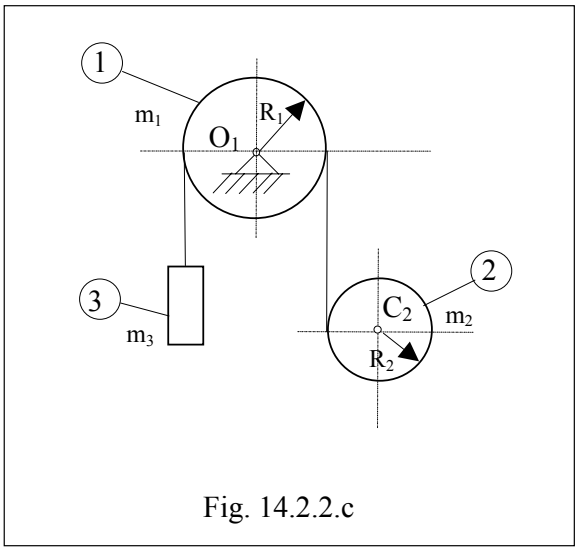


Fig. 14.2.2.c

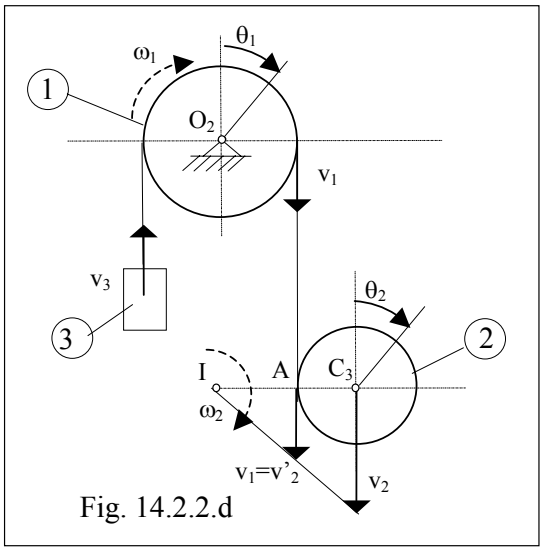


Fig. 14.2.2.d

Din analiza cinematică a mişcării (conform fig 14.2.2.d) se obţine:

$$v_3=v_1=R_1\dot{\theta}_1 \;\; si \;\; v_2=IC_2\cdot\dot{\theta}_2=(IA+R_2)\cdot\dot{\theta}_2=\left(\frac{v'_2}{\dot{\theta}_2}+R_2\right)\cdot\dot{\theta}_2=R_1\cdot\dot{\theta}_1+R_2\cdot\dot{\theta}_2 \quad \text{(i)}$$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{4}m_1 R_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 (R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{4}m_2 R_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{4}m_3 R_1 \dot{\theta}_1^2 \qquad \text{(j)}$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_1} = 0\,; \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0 \qquad \text{(k)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right) R_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 R_1 \left(R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right) R_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 R_1 \left(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 R_2 \left(R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2\right) + \frac{m_2 R_2^2}{2}\dot{\theta}_2 \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 R_2 \left(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2\right) + \frac{m_2 R_2^2}{2}\ddot{\theta}_2$$

Forțele generalizate Q_1 şi Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (θ_1 respectiv θ_2) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.2.d) adică:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{(\delta L)_{\theta_1 var}}{\delta\theta_1} = \frac{m_2 g R_1 \delta\theta_1 - m_3 g R_1 \delta\theta_1}{\delta\theta_1} = R_1 g(m_2 - m_3) \\ Q_2 &= \frac{(\delta L)_{\theta_2 var}}{\delta\theta_2} = \frac{m_2 g R_2 \delta\theta_2}{\delta\theta_2} = R_2 g m_2 \end{aligned} \qquad \text{(l)}$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = Q_2.$$

se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right) R_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 R_1 \left(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2\right) = R_1 g(m_2 - m_3) \\ m_2 R_2 \left(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2\right) + \frac{m_2 R_2^2}{2}\ddot{\theta}_2 = R_2 g m_2 \end{cases} \qquad \text{(m)}$$

de unde rezultă accelerațiile unghiulare $\ddot{\theta}_1$ *si* $\ddot{\theta}_2$ (care sunt constante).

14.2.3. ***Se consideră*** *sistemul din figură unde mărimile R, G, α, sunt cunoscute format din trei corpuri, după cum urmează(fig. 14.2.3.a):*
Corpul (1) de greutate $G_1 = 8G$, coboară pe planul înclinat cu unghiul α, fără frecare ;
Corpul (2) de greutate $G_2 = 8G$ şi rază $R_2 = R$ este antrenat într-o mişcare de rotație (se neglijează de asemenea frecarea în lagărul O_2)
Corpul (3) de greutate $G_3 = 64G$ şi rază $R_3 = 2R$ se deplazează în jos având o mişcare plan-paralelă.
Se cere:
Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange

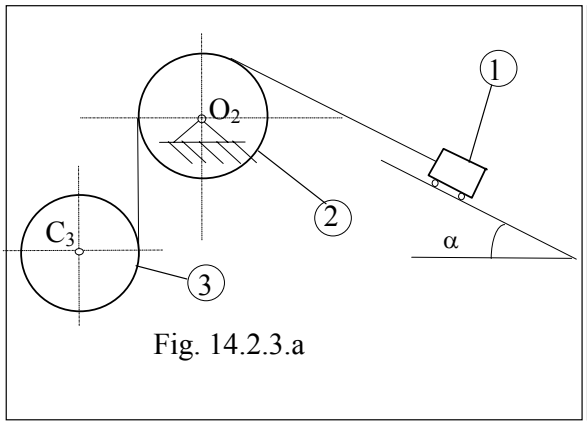


Fig. 14.2.3.a

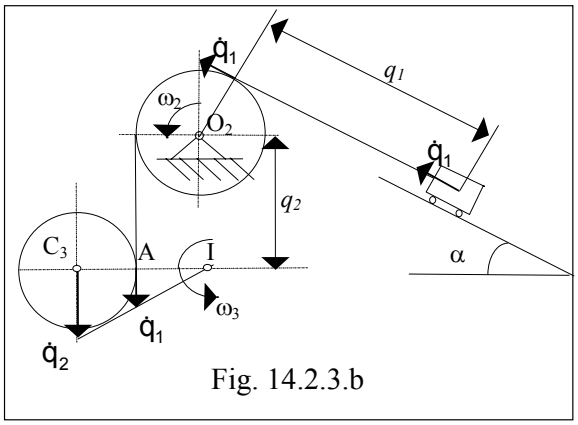


Fig. 14.2.3.b

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mişcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mişcarea cu q_1 şi q_2 (fig.14.2.3.b). Notând $AI=x$, relațiile de lanț cinematic pentru viteze sunt:

$$\begin{aligned} &\omega_2 = \frac{\dot q_1}{R} \\ &\omega_3 = \frac{\dot q_1}{x} = \frac{\dot q_2}{2R+x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x = \frac{2R\dot q_1}{\dot q_2 - \dot q_1} \\ &\omega_3 = \frac{\dot q_2 - \dot q_1}{2R} \end{aligned} \tag{a}$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned} &E_1 = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 = \frac{4G}{g}\dot q_1^2 \\ &E_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{2G}{g}\dot q_1^2, \ \ unde\ J_2 = \frac{2G}{g}R^2 \\ &E_3 = \frac{1}{2}M_3 v_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{16G}{g}\left(\dot q_1^2 + 3\dot q_2^2 - 2\dot q_1\dot q_2\right) \end{aligned} \tag{b}$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{2G}{g}\left(11\dot q_1^2 + 24\dot q_2^2 - 16\dot q_1\dot q_2\right) \tag{c}$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial q_1} = 0\ ; \qquad \dfrac{\partial E}{\partial q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial \dot q_1} = \dfrac{2G}{g}\left(22\dot q_1 - 16\dot q_2\right) \ \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot q_1}\right) = \dfrac{4G}{g}\left(11\ddot q_1 - 8\ddot q_2\right) \\ \dfrac{\partial E}{\partial \dot q_2} = \dfrac{2G}{g}\left(48\dot q_2 - 16\dot q_1\right) \ \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot q_2}\right) = \dfrac{32G}{g}\left(3\ddot q_2 - \ddot q_1\right) \end{cases} \tag{d}$$

Forțele generalizate Q_1 şi Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (q_1 respectiv q_2) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig.14.2.3.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1 var}}{\delta q_1} = -8G\sin\alpha; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 var}}{\delta q_2} = 64G \tag{e}$$

Înlocuind relațiile (d) şi (e) în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2$$

obținem următorul sistem de ecuații algebrice:

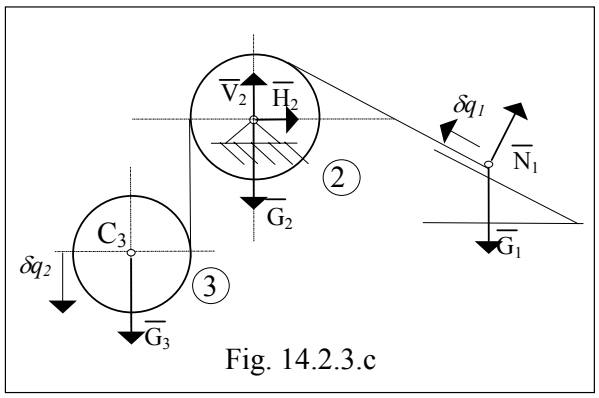


Fig. 14.2.3.c

$$\begin{cases} 11\ddot{q}_1 - 8\ddot{q}_2 = -2g\sin\alpha \\ -\ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 = 2g \end{cases} \tag{f}$$

Rezolvând acest sistem rezultă accelerațiile generalizate

$$\ddot{q}_1 = \frac{2g}{25}(8 - 3\sin\alpha); \qquad \ddot{q}_2 = \frac{2g}{25}(11 - \sin\alpha) \tag{g}$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate $(\dot{q}_1 \ \ si \ \ \dot{q}_2)$, respectiv deplasările generalizate *(q_1 şi q_2):*

$$\dot{q}_1 = \frac{2g}{25}(8 - 3\sin\alpha)\,t + C_1\ ; \qquad \dot{q}_2 = \frac{2g}{25}(11 - \sin\alpha)\,t + C_2 \tag{h}$$

$$q_1 = \frac{g}{25}(8 - 3\sin\alpha)t^2 + C_1 t + C_3\ ; \quad q_2 = \frac{g}{25}(11 - \sin\alpha)t^2 + C_2 t + C_4 \tag{i}$$

Constantele C_1 ... C_4 se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

14.2.4. ***Se consideră*** *sistemul din figura 14.2.4.a format din trei corpuri unde mărimile R, G, α, sunt cunoscute:*
Corpul (1) de greutate G_1=200G coboară vertical;
Corpul (2) de greutate G_2 = 8G şi rază R_2 = 2R este antrenat într-o mişcare de rotație (fără frecare în lagărul O_2)
Corpul (3) de greutate G_3 = 16G şi rază R_3 = R coboară pe planul înclinat cu unghiul α (rostogolindu-se şi alunecând simultan,cu s=0, μ=0) într-o mişcare plan-paralelă.

Se cere: *Să se determine mişcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (parametrii h_1, v_1, a_1),*

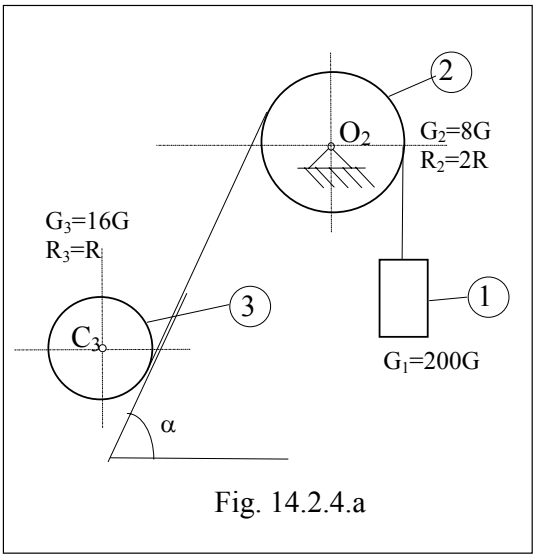


Fig. 14.2.4.a

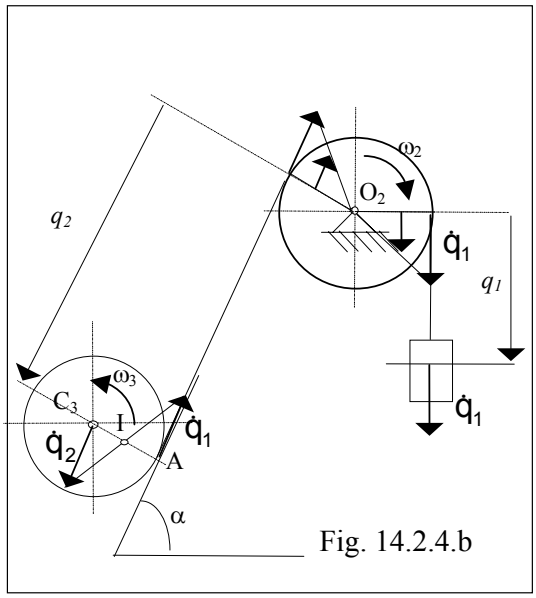


Fig. 14.2.4.b

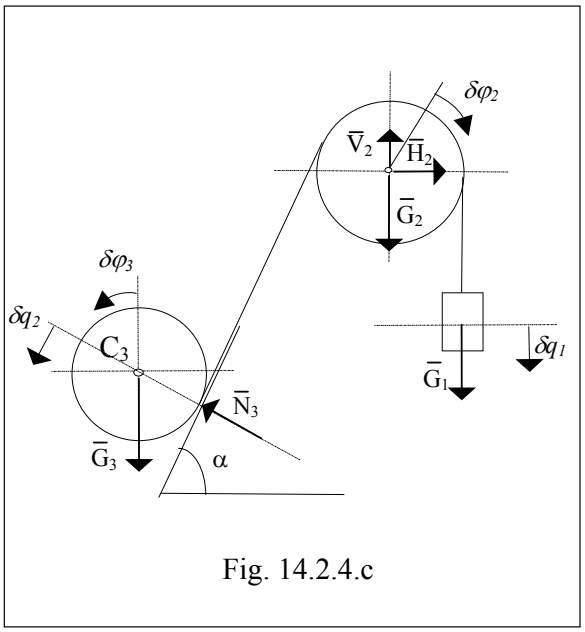


Fig. 14.2.4.c

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mişcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mişcarea cu q_1 şi q_2 (fig.14.2.4.a). Notând $AI=x$, relaţiile de lanţ cinematic pentru viteze sunt:

$$\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{2R}; \quad \omega_3 = \frac{q_1}{x} = \frac{q_2}{R-x} \tag{a}$$

De unde se obţine:

$$x = \frac{R\dot{q}_1}{\dot{q}_1 + \dot{q}_2} \quad si \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{R} \tag{b}$$

Energiile cinetice de fiecare corp se scriu astfel:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{100G}{g} \dot{q}_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{2G}{g} \dot{q}_1^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_3^2 \tag{c}$$

$$E_3 = \frac{4G}{g}\left(3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{2G}{g}\left(57\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right)$$

Derivatele energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{4G}{g}\left(57\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{4G}{g}\left(57\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2\right) \tag{d}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4G}{g}\left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{4G}{g}\left(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right)$$

Forțele generalizate Q_1 şi Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (q_1 respectiv q_2) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.4.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1\, var}}{\delta q_1} = G_1 = 200G; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2\, var}}{\delta q_2} = G_3 \sin\alpha = 16G\sin\alpha. \tag{e}$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2. \tag{f}$$

se obține sistemul algebric de ecuații:

$$\begin{cases} 57\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 = 50g \\ 2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 4g\sin\alpha \end{cases} \tag{g}$$

cu soluțiile:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{(25 - 4\sin\alpha)}{27} g; \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{(114\sin\alpha - 50)}{27} g \end{cases} \tag{h}$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate $(\dot{q}_1 \;\; si \;\; \dot{q}_2)$

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{(25 - 4\sin\alpha)}{27} gt + C_1 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{(114\sin\alpha - 50)}{27} gt + C_2 \end{cases} \tag{i}$$

respectiv deplasările generalizate *(q_1 şi q_2):*

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{(25 - 4\sin\alpha)}{54} gt^2 + C_1 t + C_3 \\ q_2 = \dfrac{(114\sin\alpha - 50)}{54} gt^2 + C_2 t + C_4 \end{cases} \tag{j}$$

Constantele C_1 ... C_4 se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

14.2.5. ***Se consideră*** *sistemul format din trei corpuri de greutăți G_1, G_2, G_3 şi doi scripeți de masă neglijabilă, unul fix de rază R_1 şi unul mobil de rază R_2. Sistemul este legat cu ajutorul unor fire flexibile şi inextensibile, care se împăşoară la periferia roților ca în figura 14.2.5.a.* ***Se cere:*** *Să se determine legea de mişcare a sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange*

Rezolvare

Metoda I

Problema are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mişcarea cu q_1 şi q_2 (fig.14.2.5.a).

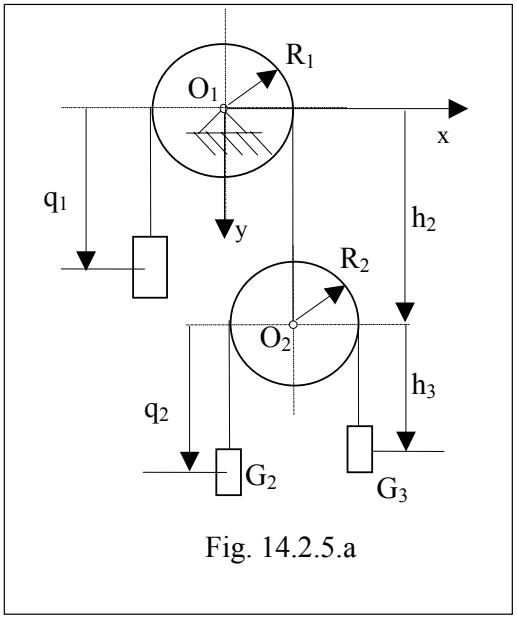


Fig. 14.2.5.a

Greutățile G_1, G_2, şi G_3 au respectiv ordonatele:

$$y_1=q_1$$
$$y_2=h_1+q_2=L_1-\pi R_1-q_1+q_2 \qquad (a)$$
$$y_3=h_1+h_2=L_1-\pi R_1-q_1+L_2-\pi R_2-q_2$$

unde L_1 şi L_2 sunt lungimile firelor

Vitezele celor trei corpuri se pot scrie deci:

$$v_1=\dot{y}_1=\dot{q}_1$$
$$v_2=\dot{y}_2=\dot{q}_2-\dot{q}_1 \qquad (b)$$
$$v_3=\dot{y}_3=-\dot{q}_1-\dot{q}_2$$

Energia cinetică totală a sistemului este:

$$E=E_1+E_2+E_3 \qquad (c)$$

Energiile celor trei corpuri se scriu:

$$E_1=\frac{G_1}{2g}v_1^2=\frac{G_1}{2g}\dot{q}_1^2;\quad E_2=\frac{G_2}{2g}v_2^2=\frac{G_2}{2g}(\dot{q}_2-\dot{q}_1)^2;\quad E_3=\frac{G_3}{2g}v_2^2=\frac{G_3}{2g}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 \qquad (d)$$

Energia cinetică totală a sistemului este deci:

$$E=\frac{G_1+G_2+G_3}{2g}\dot{q}_1^2+\frac{G_2+G_3}{2g}\dot{q}_2^2+\frac{G_3-G_2}{g}\dot{q}_1\dot{q}_2 \qquad (d)$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice sunt:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1}=0;\ \frac{\partial E}{\partial q_2}=0;$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}=\frac{G_1+G_2+G_3}{g}\dot{q}_1+\frac{G_3-G_2}{g}\dot{q}_2 \qquad (e)$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}=\frac{G_2+G_3}{g}\dot{q}_2+\frac{G_3-G_2}{g}\dot{q}_1$$

Detreminarea forțelor generalizate se poate face în două moduri:

a. prin anularea lucrului mecanic virtual, considerând pe rând pe q_1 , respectiv q_2 variabile:

$$(\delta L)_{q_1\,var}=G_1\delta q_1-(G_2+G_3)\delta q_1=(G_1-G_2-G_3)\delta q_1$$
$$(\delta L)_{q_2\,var}=(G_2-G_3)\delta q_2 \qquad (f)$$
$$\Rightarrow Q_1=\frac{(\delta L)_{q_1\,var}}{\delta q_1}=G_1-G_2-G_3;\quad Q_2=\frac{(\delta L)_{q_2\,var}}{\delta q_2}=G_2-G_3$$

b. prin anularea derivatelor parțiale ale funcției de forță U; în cazul de față aceasta se scrie astfel:

$$U=\sum_{i=1}^{3}m_i g y_i = G_1 q_1 + G_2\left(q_2 + L_1 - \pi R_1 - q_1\right) + G_3\left(L_1 + L_2 - \pi R_1 - \pi R_2 - q_1 - q_2\right)$$

adică: $Q_1 = \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = G_1 - G_2 - G_3;$ $\qquad Q_2 = \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = G_2 - G_3;$ (f')

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2.$$

se obține sistemul algebric de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{G_1+G_2+G_3}{g}\ddot{q}_1 + \dfrac{G_3-G_2}{g}\ddot{q}_2 = G_1 - G_2 - G_3 \\ \dfrac{G_3-G_2}{g}\ddot{q}_1 + \dfrac{G_2+G_3}{g}\ddot{q}_2 = G_2 - G_3 \end{cases} \quad \text{(g)}$$

de unde se obțin accelerațiile :

$$\ddot{q}_1 = \frac{G_1\left(G_2+G_3\right) - 4G_2G_3}{G_1\left(G_2+G_3\right) + 4G_2G_3} g;$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2G_1\left(G_2-G_3\right)}{G_1\left(G_2+G_3\right) + 4G_2G_3} g \quad \text{(h)}$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate $\left(\dot{q}_1 \;\; si \;\; \dot{q}_2\right)$ respectiv deplasările generalizate *(q_1 şi q_2)*. Constantele $C_1 \ldots C_4$ se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

Metoda a II a

Se consideră drept coordonate generalizate unghiurile de rotație ale celor două discuri *φ_1 şi φ_2,* iar în loc de greutățile celor trei corpuri se consideră masele *m_1 , m_2, m_3,* conform fig. 14.2.5.b.

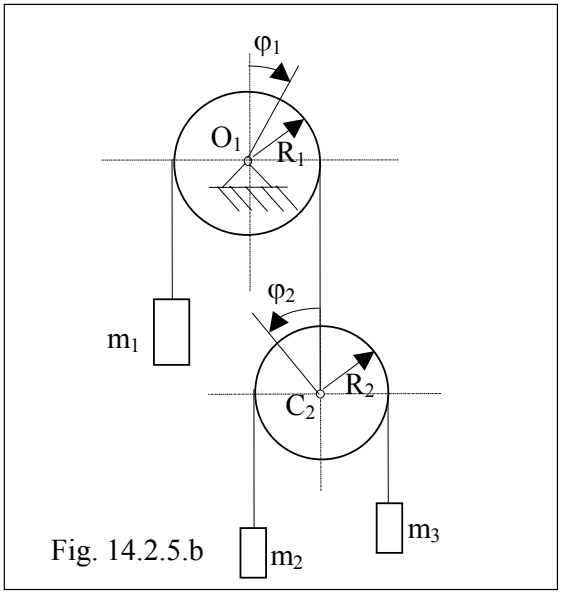


Fig. 14.2.5.b

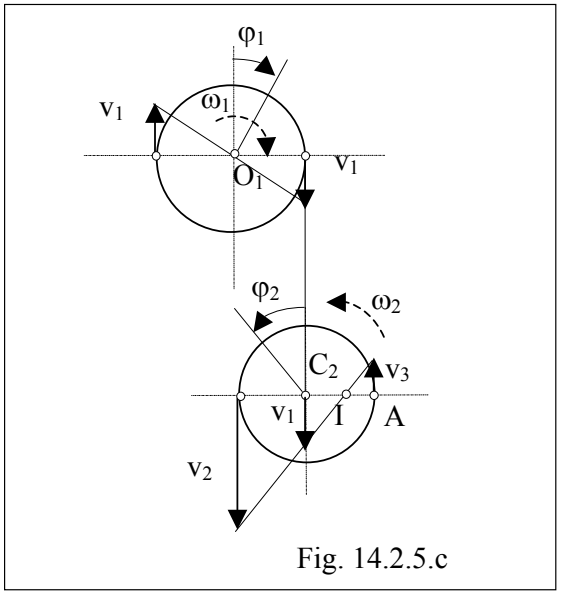


Fig. 14.2.5.c

Din analiza cinematică a mişcării (conform fig 14.2.5.c) se obţine:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \frac{v_1}{R_1} \;\; si \;\; \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_3}{x} = \frac{v_1}{R_2 - x} = \frac{v_2}{2R_2 - x} \Rightarrow x = IA = \frac{v_3 R_2}{v_1 + v_3} \qquad \text{(i)}$$

Rezultă că vitezele celor trei corpuri de mase m_1, m_2 şi m_3 sunt:

$v_1 = R_1\dot{\varphi}_1;\; v_2 = R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2;\;\; v_3 = R_1\dot{\varphi}_1 - R_2\dot{\varphi}_2;$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2}m_1 R_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(R_1\dot{\varphi}_1 - R_2\dot{\varphi}_2\right)^2;$$

$$E = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)R_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)R_2\dot{\varphi}_2^2 + (m_2-m_3)R_1R_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \qquad \text{(j)}$$

Derivatele parţiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0;\;\; \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0 \qquad \text{(k)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2+m_3)R_1\dot{\varphi}_1 + (m_2-m_3)R_1R_2\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = (m_2+m_3)R_2\dot{\varphi}_2 + (m_2-m_3)R_1R_2\dot{\varphi}_1 \qquad \text{(l)}$$

Forţele generalizate Q_1 şi Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (φ_1 respectiv φ_2) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.5.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{\varphi_1\, var}}{\delta\varphi_1} = R_1 g(-m_1 + m_2 + m_3);\quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{\varphi_2\, var}}{\delta\varphi_2} = R_2 g(m_2 - m_3) \qquad \text{(m)}$$

Înlocuind în ecuaţiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = Q_2.$$

se obţine sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\begin{cases} (m_1+m_2+m_3)R_1\ddot{\varphi}_1 + (m_2-m_3)R_1R_2\ddot{\varphi}_2 = R_1 g(-m_1 + m_2 + m_3) \\ (m_2+m_3)R_2\ddot{\varphi}_2 + (m_2-m_3)R_1R_2\ddot{\varphi}_1 = R_2 g(m_2 - m_3) \end{cases} \qquad \text{(n)}$$

de unde rezultă acceleraţiile unghiulare $\ddot{\varphi}_1 \;\; si \;\; \ddot{\varphi}_2$ (care sunt constante).

14.2.6 Se consideră *sistemul din figură format din două corpuri: un corp paralelipipedic de masă m_1 şi bilă de masă m_2, care sun legate între ele prin intermediul unei bare $A_1A_2 = \ell$ de masă neglijabilă. Se neglijază frecarea dintre corp şi ghidajul orizontal. (fig. 14.2.6) .*

Se cere *să se determine legea de mişcare a sistemului folosind ecuaţiile lui Lagrange.*

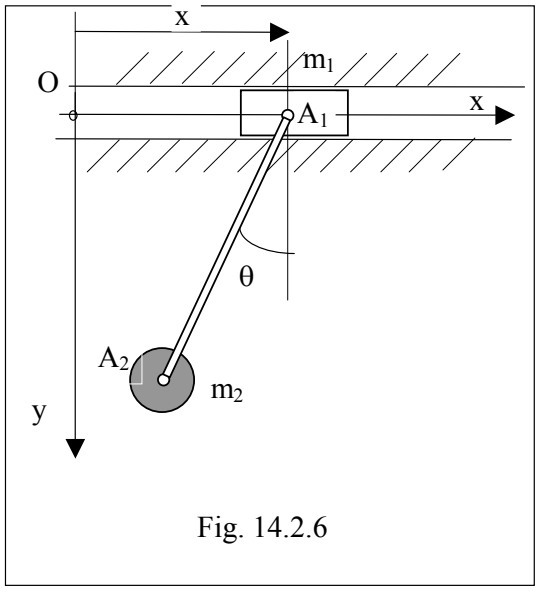


Fig. 14.2.6

Rezolvare

Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii x şi θ.

Coordonatele centrelor de masă ale celor două corpuri sunt:

$$A_1\begin{cases}x_1 = x\\ y_1 = 0\end{cases} \qquad A_2\begin{cases}x_2 = x - \ell\, sin\,\theta\\ y_2 = \ell\, cos\,\theta\end{cases} \tag{a}$$

Deci vitezele după cele două direcţii sunt:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \dot{x}\\ \dot{y}_1 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x}_2 = \dot{x} - \ell\dot{\theta}\, cos\,\theta\\ \dot{y}_2 = -\ell\dot{\theta}\, sin\,\theta\end{cases}$$

$$v_1^2 = \dot{x}^2; \qquad v_2^2 = \left(\dot{x} - \ell\dot{\theta}\, cos\,\theta\right)^2 + \left(\ell\dot{\theta}\, sin\,\theta\right)^2$$

Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + \frac{m_2\ell}{2}\left(\ell\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}\, cos\,\theta\right) \tag{b}$$

Funcţia de forţă în acest caz are forma:

$$U = -V = m_2 g y_2 = m_2 g\ell\, cos\,\theta \tag{c}$$

Funcţia lui Lagrange are deci expresia:

$$L = E + U = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + \frac{m_2\ell}{2}\left(\ell\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}\, cos\,\theta\right) + m_2 g\ell\, cos\,\theta \tag{d}$$

Se aplică ecuaţiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0,\ cu\ q_1 = x\ si\ q_2 = \theta$$

Se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[\left(m_1 + m_2\right)\dot{x} - m_2\ell\dot{\theta}\, cos\,\theta\right] = 0\\ m_2\ell\dfrac{d}{dt}\left[\ell\dot{\theta} - \dot{x}\, cos\,\theta\right] - m_2\ell\left(\dot{x}\dot{\theta} - g\right) sin\,\theta = 0\end{cases} \tag{e}$$

În cazul micilor oscilaţii ale sistemului se poate considera $sin\,\theta \cong \theta$, $cos\,\theta \cong 1$ şi sistemul de ecuaţii diferenţiale (e) devine:

$$\begin{cases}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x} - m_2\ell\dot{\theta} = C;\\ \ddot{\theta} + \dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\dfrac{g}{\ell}\theta = 0\end{cases} \tag{f}$$

Cea de a doua ecuaţie reprezintă ecuaţia unei mişcări armonice de pulsaţie: $\omega = \sqrt{g\left(m_1 + m_2\right)/ m_1\ell}$, cu soluţia: $\theta = \theta_0\, cos\left(\omega t + \varphi\right)$ În cazul în care $m_1 >> m_2$ (când corpul 1 rămâne practic în repaus) se obţine (trecând la limită) perioada pendulului matematic: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

14.2.7. Se consideră *sistemul din figură format din două bile de mase m_1 şi m_2, suspendate pe două fire de lungimi $OA_1 = A_1A_2 = \ell$ de masă neglijabilă.* ***Se cere*** *să se determine pulsaţiile proprii ale sistemului de pendule folosind ecuaţiile lui Lagrangei.*

Rezolvare

Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii φ_1 şi φ_2, unghiurile pe care le fac firele cu verticala (fig. 14.2.7).Coordonatele centrelor de masă ale celor două bile sunt:

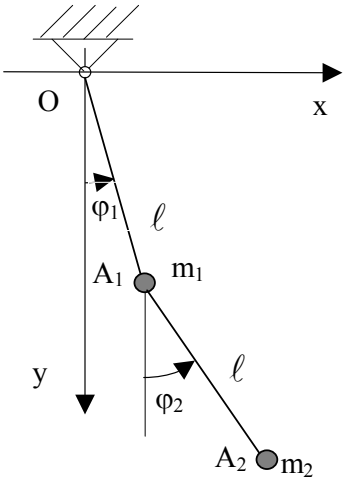


Fig. 14.2.7

$$A_1\begin{cases}x_1=\ell\sin\varphi_1\\ y_1=\ell\cos\varphi_1\end{cases}\qquad A_2\begin{cases}x_2=\ell(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)\\ y_2=\ell(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)\end{cases}\tag{a}$$

Deci vitezele celor două bie sunt:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\ell\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1\\ \dot{y}_1=-\ell\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1\end{cases}\Rightarrow v_1^2=\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2=\ell\dot{\varphi}_1$$

$$\begin{cases}\dot{x}_2=\ell(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1+\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)\\ \dot{y}_2=-\ell(\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1+\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2)\end{cases}\Rightarrow v_2^2=\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2=\ell\left(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)$$

Dacă se consideră $\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cong 1$ se obţine expresia energiei cinetice:

$$E=E_1+E_2=\frac{m\ell^2}{2}\left(2\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)\tag{b}$$

Funcţia de forţă se scrie:

$$U=-2mg\ell\left(2\sin^2\frac{\varphi_1}{2}+\sin^2\frac{\varphi_2}{2}\right)\cong\frac{1}{2}mg\ell\left(2\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\tag{c}$$

Funcţia lui Lagrange are deci expresia:

$$L=E+U=\frac{m\ell^2}{2}\left(2\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)+\frac{mg\ell}{2}\left(2\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\tag{d}$$

Se aplică ecuaţiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\ cu\ q_1=\varphi_1\ si\ q_2=\varphi_2$$

Se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases}2\ell\ddot{\varphi}_1+\ell\ddot{\varphi}_2+2g\varphi_1=0\\ \ell\ddot{\varphi}_1+\ell\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0\end{cases}\tag{e}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (e) admite soluţii de forma:

$\varphi_1 = C_1 \cos pt; \quad \varphi_2 = C_2 \cos pt$

Ecuația caracteristică (ecuația pulsațiilor proprii) se scrie:

$$\begin{vmatrix} 2g - 2\ell p^2 & -\ell p^2 \\ -\ell p^2 & g - \ell p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(f)}$$

Dcei cele două pulsații proprii sunt soluțiile determinantului caracteristic(se exclud soluțiile negative):

$$p_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2g}}{\left(\sqrt{2}+1\right)\ell}}; \qquad p_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2g}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\ell}} \qquad \text{(g)}$$

14.2.8. Se consideră *sistemul din figura 14.2.8.a format din culisa de greutate G_2 şi bara $A_1A_2 = \ell$ de greutate G_1. Culisa se poate deplasa orizontal (se neglijază frecarea) fiind legată cu un resort de constantă elastică k de mediul fix. Asupra capătului A_3 al barei se aplică o forță orizontală F.* ***Se cere:***

1. *să se determine poziția de echilibru a sistemului*
2. *să se determine legea de mişcare a sistemului pornind din poziția de echilibru studiată la punctu (1), folosind ecuațiile lui Lagrange.*

Rezolvare

1. Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii liniari x (Față de poziția inițială) şi θ (fig. 14.2.8.b).

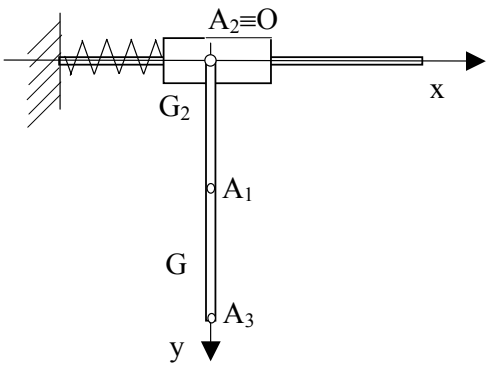


Fig. 14.2.8.a

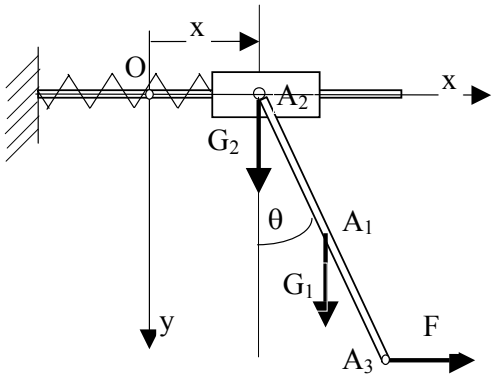


Fig. 14.2.8.b

Condiția de echilibru a sistemului se poate obține folosind două metode:

a. din condiția de anulare a forțelor generalizate:

$$Q_k = \frac{(\delta L)_{q_k\, var}}{\delta q_k} = 0, \;\; k = 1,2 \qquad \text{(a)}$$

unde: Q_k poate reprezenta din punct de vedere dimensional o forţă sau un cuplu, după cum coordonata generalizată corespunzătoare reprezintă o lungime sau un unghi.

$(\delta L)_{q_k\, var}$ reprezintă luncrul mecanic virtual produs de sarcini numai pe deplasările date de variaţia parametrului q_k, adică (δq_k).

Pentru cei doi parametri avem :

$$Q_x = \frac{(\delta L)_{x\,var}}{\delta x} = \frac{-kx\cdot\delta x + F\cdot\delta x}{\delta x} = 0$$

$$Q_\theta = \frac{(\delta L)_{\theta\, var}}{\delta\theta} = \frac{-G_1 \sin\theta\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\delta\theta + F\cos\theta\cdot\ell\cdot\delta\theta}{\delta\theta} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Rezultă aşadar valorile parametrilor pentru poziţia de echilibru:

$$x = \frac{F}{k}; \quad tg\theta = \frac{2F}{G_1} \qquad \text{(c)}$$

b. din anularea derivatelor parţiale ale funcţiei de forţă a sistemului, întrucât forţele care acţionează asupra sistemului sunt forţe conservative , adică:

$$\overline{F_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\bar{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i}\bar{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i}\bar{k} \qquad \text{atunci:} \qquad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

În cazul problemei de faţă funcţia de forţă a sistemului se scrie:

$$U = \sum U_i = -\frac{1}{2}kx^2 + G_1\ell\cos\theta - F(x + \ell\sin\theta) \qquad \text{(d)}$$

adică:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -kx + F = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\theta} = -G_1\dfrac{\ell}{2}\sin\theta + F\ell\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Rezultă aceleaşi valori ale parametrilor pentru poziţia de echilibru date de relaţia (c)

2. Coordonatele centrelor de masă ale celor două corpuri sunt:

$$A_1\begin{cases} x_1 = x + \dfrac{\ell}{2}\sin\theta \\ y_1 = \dfrac{\ell}{2}\cos\theta \end{cases} \qquad A_2\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Deci vitezele după cele două direcţii sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} + \dfrac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x} \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow v_2^2 = \dot{x}^2 \qquad \text{(g)}$$

$$v_1^2 = \left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta \right)^2 + \left(-\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta \right)^2 = \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{G_1}{2g}v_1^2 + \frac{J_1}{2}\omega_2^2 + \frac{G_2}{2g}v_2^2$$

$$E = \frac{G_1}{2g}\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{\ell^2}{12}\dot{\theta}^2 \right) + \frac{G_2}{2g}\dot{x}^2 \qquad \text{(h)}$$

Funcția de forță în acest caz are forma: $U = -\frac{1}{2}kx^2 + G_1\frac{\ell}{2}\cos\theta$ (i)

Funcția lui Lagrange are deci expresia:

$$L = E + U = \frac{G_1}{2g}\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 + \ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \right) + \frac{G_2}{2g}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + G_1\frac{\ell}{2}\cos\theta \qquad \text{(j)}$$

Se aplică ecuațiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \ cu\ q_1 = x\ si\ q_2 = \theta$$

Se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{g}\ddot{x} + \frac{G_1\ell}{2g}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{G_1\ell}{2g}\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0 \\ \frac{G_1\ell}{2g}\ddot{x}\cos\theta + \frac{G_1\ell^2}{3g}\ddot{\theta} + \frac{G_1\ell}{2}\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \text{(k)}$$

În cazul micilor oscilații ale sistemului se poate considera $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta = 1$ şi se obține sistemul:

$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{g}\ddot{x} + \frac{G_1\ell}{2g}\ddot{\theta} - \frac{G_1\ell}{2g}\dot{\theta}^2 \cdot \theta + kx = 0 \\ \frac{G_1\ell}{2g}\ddot{x} + \frac{G_1\ell^2}{3g}\ddot{\theta} + \frac{G_1\ell}{2} \cdot \theta = 0 \end{cases} \qquad \text{(l)}$$

Acest sistem se poate rezolva prin metode numerice obținându-se soluții aproximative care descriu mişcarea sistemului, soluții care țin seama şi de condițiile inițiale ale problemei.

14.2.9. ***Se consideră*** *sistemul format din trei discuri omogene de greutăți G_1, G_2, G_3, unul fix de rază R_3 şi celelalte mobile de rază R_1 şi R_2 legate între ele cu ajutorul unor fire flexibile şi inextensibile, care se împăşoară la periferia lor ca în figura 14.2.9.a.* ***Se cere:*** *Să se determine legea de mişcare a sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange*

Rezolvare

Sisdtemul are trei grade de libertate deoarece pentru stabilirea configurației lui sunt necesari trei parametri independenți: se consideră drept coordonate generalizate unghiurile de rotație ale celor trei discuri φ_1 φ_2 şi φ_3, conform fig. 14.2.9.a.

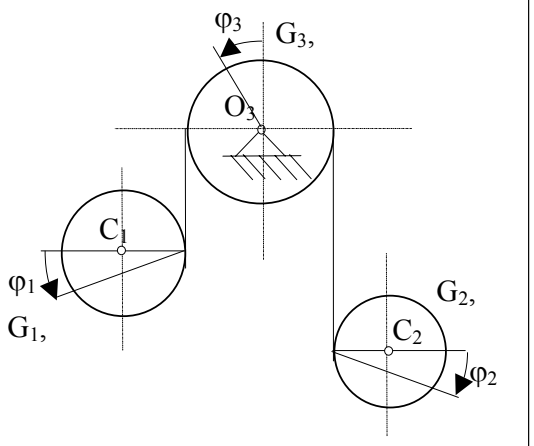


Fig. 14.2.9.a

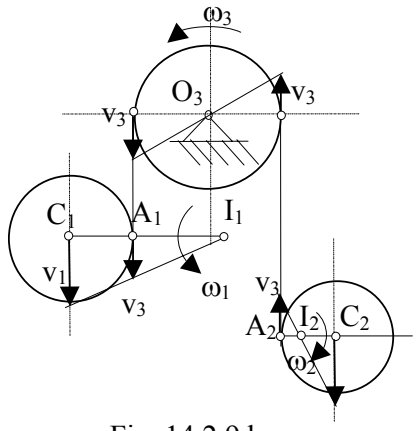


Fig. 14.2.9.b

Din analiza cinematică a mişcării (conform fig 14.2.9.b) se obține:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \frac{v_1}{R_1 + x} = \frac{v_3}{x} \quad (unde\ x = I_1A_1)$$
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_3}{y} = \frac{v_1}{R_2 - y} \quad (unde\ y = I_1A_1); \qquad \dot{\varphi}_3 = \omega_3 = \frac{v_3}{R_3} \tag{a}$$

Rezultă că vitezele centrelor de masă ale celor două discuri 1 şi 2 sunt:

$$v_1 = R_1\dot{\varphi}_1 + R_3\dot{\varphi}_3;\ v_2 = R_3\dot{\varphi}_3 - R_2\dot{\varphi}_2$$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2;$$
$$E = \frac{G_1}{2g}\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_3\dot{\varphi}_3\right)^2 + \frac{G_1}{4g}R_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{G_2}{2g}\left(R_3\dot{\varphi}_3 - R_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + \frac{G_2}{4g}R_2^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{G_3}{4g}R_3^2\dot{\varphi}_3^2 \tag{b}$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0; \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{R_1G_1}{g}\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_3\dot{\varphi}_3\right) + \frac{G_1}{2g}R_1^2\dot{\varphi}_1$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = -\frac{R_2G_2}{g}\left(R_3\dot{\varphi}_3 - R_2\dot{\varphi}_2\right) + \frac{G_2}{2g}R_2^2\dot{\varphi}_2 \tag{c}$$
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{R_3G_1}{g}\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_3\dot{\varphi}_3\right) + \frac{R_3G_2}{g}\left(R_3\dot{\varphi}_3 - R_2\dot{\varphi}_2\right) + \frac{G_3}{2g}R_3^2\dot{\varphi}_3$$

Forțele generalizate Q_1 *şi* Q_2 se calculează variind succesiv parametrul corespunzător (φ_1 , φ_2 respectiv φ_3) şi fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.9.b) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{\varphi_1\, var}}{\delta\varphi_1} = R_1 G_1\ ; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{\varphi_2\, var}}{\delta\varphi_2} = R_2 G_2 ; \quad Q_3 = \frac{(\delta L)_{\varphi_3\, var}}{\delta\varphi_3} = R_3 (G_1 - G_2) \qquad \text{(d)}$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_k} = Q_k ; \qquad k = 1,\ 2,\ 3$$

se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} 3R_1\ddot{\varphi}_1 + 2R_3\ddot{\varphi}_3 = 2g \\ 3R_2\ddot{\varphi}_2 - 2R_3\ddot{\varphi}_3 = 2g \\ 2R_1G_1\ddot{\varphi}_1 - 2R_2G_2\ddot{\varphi}_2 + R_3(2G_1 + 2G_2 + G_3)\ddot{\varphi}_3 = 2g(G_1 - G_2) \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Rezolvând acest sistem rezultă accelerațiile unghiulare :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \dfrac{2g}{3R_1}\dfrac{4G_2 + 3G_3}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{2g}{3R_2}\dfrac{4G_1 + 3G_3}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ \ddot{\varphi}_3 = \dfrac{2g}{R_3}\dfrac{G_1 - G_2}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3} \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

şi accelerațiile centrelor de masă ale discurilor 1 şi 2:

$$\begin{cases} a_1 = R_1\ddot{\varphi}_1 + R_3\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{2g}{3}\dfrac{G_2 + 3(G_1 + G_3)}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ a_2 = R_3\ddot{\varphi}_3 - R_2\ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{2g}{3}\dfrac{G_1 + 3(G_2 + G_3)}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3} \end{cases} \qquad \text{(g)}$$

Observații

- Semnul minus de la accelerația a_2 arată că sensul acestei accelerații este opus celui considerat în fig 14.2.9.b., adică: $R_3\ddot{\varphi}_3 - R_2\ddot{\varphi}_2 < 0$;
- Sistemul fiind acționat numai de greutățile proprii este conservativ, deci există o funcție de forță U a sistemului care are expresia:

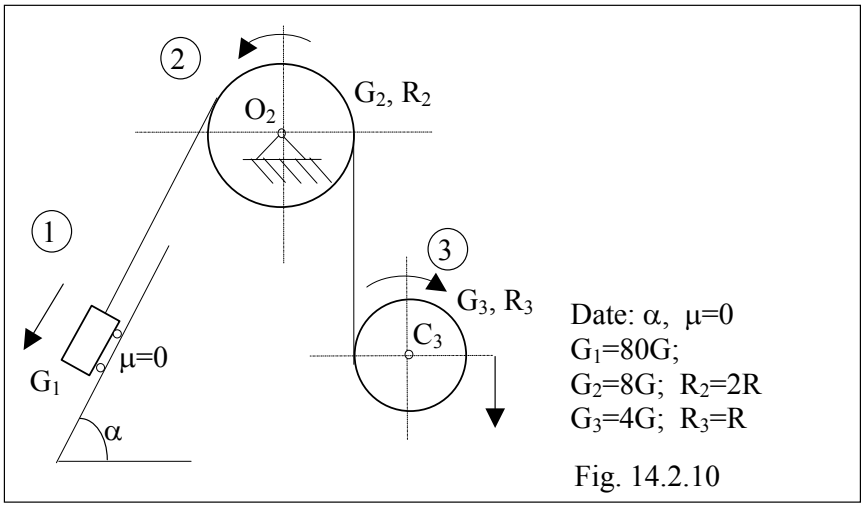
  $U = G_1(R_1\varphi_1 + R_3\varphi_3) - G_2(R_3\varphi_3 - R_2\varphi_2)$. Deci se pot considera ecuațiile lui Lagrange sub forma: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial \varphi_k} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_k}; \qquad k = 1,\ 2,\ 3$

  care conduc la aceleaşi ecuații algebrice (e).

PROBLEME PROPUSE

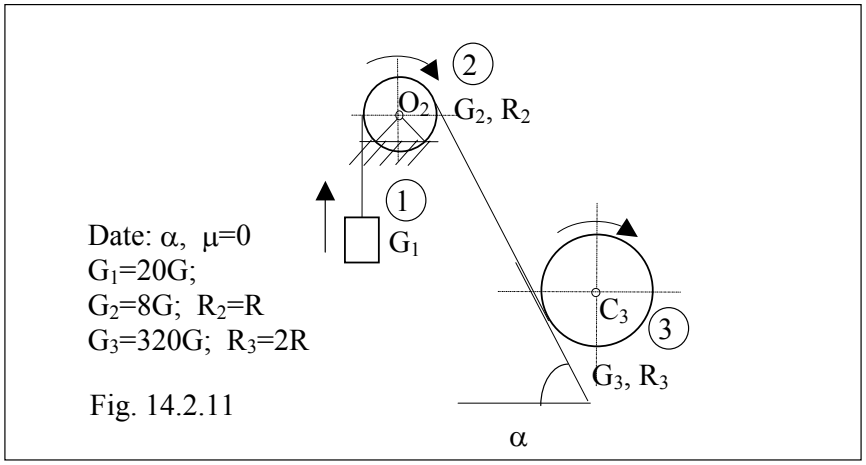
Se consideră *sistemele formate din trei corpuri: un corp de greutate G_1 şi două discuri omogene de greutăţi G_2, G_3, unul fix de rază R_2 şi celelălalt mobil de rază R_3 legate între ele cu ajutorul unor fire flexibile şi inextensibile, care se îmfăşoară la periferia lor ca în figurile 14.2.10...4.2.12. (pentru problemele 4.2.11 şi 4.2.12 corpul 3 se rostogoleşte şi alunecă simultan,cu s=0, μ=0)*

Se cere: *Să se determine legea de mişcare a sistemelor cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange.*



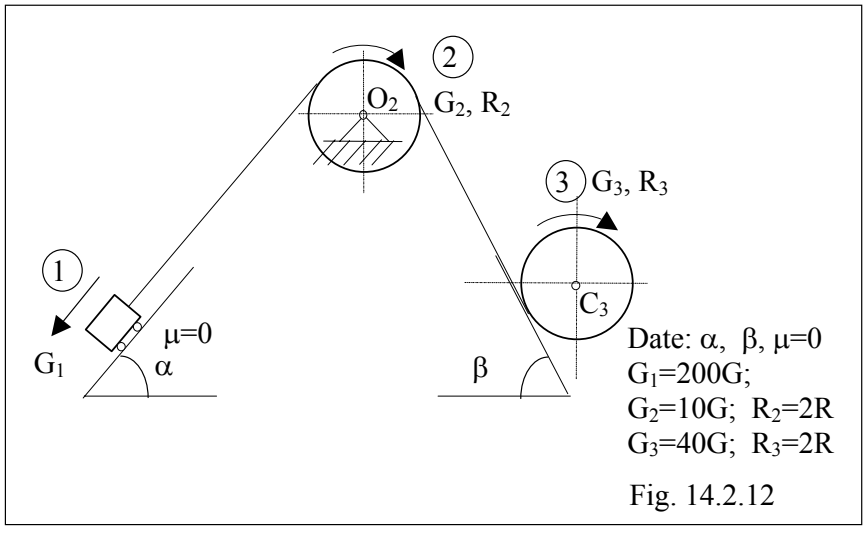
Date: α, μ=0
G_1=80G;
G_2=8G; R_2=2R
G_3=4G; R_3=R

Fig. 14.2.10



Date: α, μ=0
G_1=20G;
G_2=8G; R_2=R
G_3=320G; R_3=2R

Fig. 14.2.11



Date: α, β, μ=0
G_1=200G;
G_2=10G; R_2=2R
G_3=40G; R_3=2R

Fig. 14.2.12

BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu, M. - *Mecanica* . Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
2. Buchholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minokov, I.A.- *Culegere de probleme de mecanică rațională* (traducere din limba rusă). Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.
3. Ceauşu, V., Enescu, N., Ceauşu, F. - *Culegere de probleme de mecanică,* I.P.Bucureşti, vol.I, II, III, 1983.
4. Darabont, Al., Munteanu , M., Văiteanu, D.- *Mecanică tehnică. Culegere de probleme. Statica şi Cinematica.* Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983
5. Enescu, N., Stroe, S., Ion, C., Ivan, M., Magheți, I., Ion, E., Savu, M., Cazacu, G. *Seminar de Mecanică*. *Probleme.* IPBucureşti, 1990
6. Huidu, T. - *Mecanica teoretică şi elemente de mecanica solidului deformabil,* vol. I, II, Institutul de Petrol şi Gaze, Ploieşti, 1983
7. Iacob, C. - *Mecanica Teoretică.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971
8. Marin , C., Huidu, T. - *Mecanica*. Editura Printech, Bucuresti 1999.
9. Posea, N., Florian,V., Talle,V., Tocaci, E.- *Mecanica aplicată pentru ingineri.* Editura tehnică, Bucureşti, 1984.
10. Rădoi, M., Deciu, E. - *Mecanica* . Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977
11. Roşca, I. – *Mecanica pentru ingineri.* Editura MatrixRom, Bucureşti, 1998.
12. Roşca, I. – Sumar de *Mecanica.* Editura MatrixRom, Bucureşti, 1999
13. Staicu, Şt.- *Mecanica.* Editura Didactică şi Pedagogică R.A, Bucureşti, 1998.
14. Vâlcovici, V., Bălan, Şt., Voinea, R. - *Mecanica Teoretică.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
15. Voinaroski, R. - *Mecanica Teoretică.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
16. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V. - *Mecanica* . Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975